Υπολογισμός του πίνακα A^n, $n \in \mathbb{Z}$ και του εκθετικού πίνακα e^{tA}

Νίκος Χαλιδιάς
Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Έστω πίνακας αριθμών $A_{m\times m}$ και έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον A^n με $n \in \mathbb{Z}$. Είναι προτιμότερο να εφαρμόσουμε κατάλληλα το θεώρημα των Cayley-Hamilton (δες [3]). Η διαγωνοποίηση δεν είναι πάντοτε εφικτή ενώ η μέθοδος με επαγωγή δεν είναι πάντοτε εύκολα πραγματοποιήσιμη. Η μέθοδος που θα παρουσιάσουμε έχει πάντοτε αποτέλεσμα (ανεξάρτητα αν ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος ή όχι) και επιπλέον είναι εύκολα «αλγοριθμοποιήσιμος» (σε αντίθεση με την μέθοδο της επαγωγής) με αποτέλεσμα τον εύκολο υπολογισμό δυνάμεων μεγάλων πινάκων με την χρήση υπολογιστών.

Το πρώτο βήμα που μπορούμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα.

Υπολογισμός Ελάχιστου Πολυωνύμου

Για να υπολογίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα $A_{m\times m}$ κατασκευάζουμε τον πίνακα $B_{m^2\times(m+1)}$ ο οποίος περιέχει στις στήλες του τους πίνακες $I, A, \cdots, A^m$. Δηλαδή στην πρώτη στήλη του πίνακα B τοποθετούμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης του I έπειτα τα στοιχεία της δεύτερης στήλης του I κ.τ.λ. Στην δεύτερη στήλη του B τοποθετούμε την πρώτη στήλη του A στην συνέχεια την δεύτερη στήλη του A κ.τ.λ

Υπολογίζουμε τον αναγμένο κλιμακωτό $\hat{B}$. Το πλήθος r των ηγετικών μονάδων (οι οποίες θα βρίσκονται στις r πρώτες στήλες) μας δίνουν τον βαθμό του ελαχίστου πολυωνύμου. Το αποτέλεσμα θα είναι ότι το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το

$$q(k) = k^r - \hat{B}_{r,r+1}k^{r-1} - \hat{B}_{r-1,r+1}k^{r-2} - \cdots - \hat{B}_{1,r+1}$$

Είναι φανερό ότι η μέθοδος αυτή είναι εύκολα «αλγοριθμοποιήσιμη».

Για την απόδειξη της παραπάνω τεχνικής μπορεί να δει κανείς το βιβλίο [3].

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε μια μέθοδο υπολογισμού του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Υπολογισμός Χαρακτηριστικού Πολυωνύμου

Θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο των Leverrier - Faddeev για τον υπολογισμό των συντελεστών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ενός πίνακα A. Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε στηρίζεται στο [2] δίνοντας μια απλούστερη μορφή της.

Έστω ο πίνακας $A_{m\times m}$ και $\delta_A(k) = k^m + a_1 k^{m-1} + \cdots + a_m$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Έστω πίνακες $N_1, \cdots, N_m$ (που θα τους υπολογίσουμε παρακάτω) τ.ω.

$$(kI - A)N(k) = I\delta_A(k) \tag{1}$$

όπου $N(k) = N_1 k^{m-1} + \cdots + N_m$. Θεωρούμε την οικογένεια πινάκων $B(s) = sI - A$. Παρατηρούμε ότι αν οι ιδιοτιμές του A είναι οι $k_1, \cdots, k_m$ (όχι κατά ανάγκη διακεκριμένες) τότε οι ιδιοτιμές του $B(s)$ είναι οι $\lambda_i = s - k_i$. Πράγματι, αφού

$$|\lambda I - B(s)| = |\lambda I - sI + A| = (-1)^m |(s-\lambda)I - A|$$

εύκολα προκύπτει το ζητούμενο.

Ο πίνακας $B(s)$ είναι αντιστρέψιμος ανν (δες [3] σελίδα 275) $\lambda_i = s - k_i \neq 0$ για $i = 1, \cdots, m$. Σε αυτή την περίπτωση (δηλαδή $s \neq k_i$ για $i = 1, \cdots, m$) ο αντίστροφος είναι ο $(sI - A)^{-1}$ με ιδιοτιμές $\frac{1}{s-k_i}$ (δες [3] σελίδα 276).

Τότε λόγω της 1 ισχύει ότι

$$\frac{N(s)}{\delta_A(s)} = (sI - A)^{-1}, \quad \text{όταν } s \neq k_i \tag{2}$$

όπου k_i για $i = 1, \cdots, m$ οι ιδιοτιμές του πίνακα A.

Επιπλέον

$$\mathrm{trace}(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s-k_1} + \cdots + \frac{1}{s-k_m} = \frac{\delta_A'(s)}{\delta_A(s)} \quad \text{(δες άσκηση 542 του [3])}$$

Όμως

$$A = sI - (sI - A)$$

Αν $s \neq k_i$ πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με τον $(sI - A)^{-1}$ και έχουμε ότι

$$s(sI - A)^{-1} - I = A(sI - A)^{-1}$$

Λαμβάνοντας το ίχνος κατά μέλη και χρησιμοποιώντας την 2 παίρνουμε την σχέση

$$s\frac{\delta_A'(s)}{\delta_A(s)} - m = \mathrm{trace}\,\frac{AN(s)}{\delta_A(s)}, \quad s \neq k_i$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}&-a_1 s^{m-1} - 2a_2 s^{m-2} - \cdots - (m-1)a_{m-1}s - ma_m = \\ &(\operatorname{trace} AN_1)s^{m-1} + (\operatorname{trace} AN_2)s^{m-2} + \cdots + (\operatorname{trace} AN_{m-1})s + \operatorname{trace} AN_m\end{aligned}$$

Επομένως

$$a_i = -\frac{1}{i} \operatorname{trace} AN_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

Για να υπολογίσουμε τους N_i θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση

$$(kI - A)N(k) = I\delta_A(k)$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι

$$N_1 k^m + N_2 k^{m-1} + \cdots + N_m k - (AN_1 k^{m-1} + AN_2 k^{m-2} + \cdots + AN_m) = I\delta_A(k)$$

Οπότε προκύπτει ο επόμενος αναδρομικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό των συντελεστών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

$$\begin{array}{rclrcl} N_1 & = & \mathbb{I}, & a_1 & = & -\frac{1}{1} \operatorname{trace} AN_1 \\ N_2 & = & AN_1 + a_1\mathbb{I}, & a_2 & = & -\frac{1}{2} \operatorname{trace} AN_2 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ N_m & = & AN_{m-1} + a_{m-1}\mathbb{I}, & a_m & = & -\frac{1}{m} \operatorname{trace} AN_m \\ 0 & = & AN_m + a_m\mathbb{I} & & & \end{array}$$

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του αντιστρόφου του A. Πράγματι, $AN_m = -a_m\mathbb{I}$ και επομένως $N_m = -a_m A^{-1}$. Αντικαθιστώντας το N_m στην προηγούμενη ισότητα λαμβάνουμε

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_m} AN_{m-1} - \frac{a_{m-1}}{a_m}\mathbb{I}$$

Παρατηρηση 1 (Ελάχιστο και χαρακτηριστικό πολυώνυμο) *Αν υπολογίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα $A_{m\times m}$ με τον τρόπο που περιγράψαμε πριν τότε με λίγη ακόμη δουλειά μπορούμε να υπολογίσουμε και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο χρησιμοποιώντας την μέθοδο των Leverrier - Faddeev.*

Στην περίπτωση που το χαρακτηριστικό πολυώνυμο συμπίπτει με το ελάχιστο δεν χρειάζεται να κάνουμε τίποτε περισσότερο. Αν όχι, τότε το ελάχιστο πολυώνυμο θα είναι βαθμού $r < m$ ενώ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι βαθμού m.

Κατασκευάζουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\hat{B} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = 0 \tag{3}$$

όπου $a_0, a_1, \cdots, a_m$ *άγνωστοι συντελεστές και* $\hat{B}$ *ο αναγμένος κλιμακωτός πίνακας του* B *που έχουμε ήδη υπολογίσει. Το ομογενές αυτό σύστημα έχει άπειρες λύσεις, δυο εκ των οποίων είναι οι συντελεστές του ελάχιστου και του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Για να υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θέτουμε* $a_m = 1$ *και τους* $a_{m-1}, a_{m-2}, \cdots, a_r$ *(όπου* r *είναι το πλήθος των ηγετικών μονάδων του αναγμένου κλιμακωτού πίνακα* $\hat{B}$*) σύμφωνα με τον αλγόριθμο των Leverrier - Faddeev. Στην συνέχεια λύνουμε το παραπάνω γραμμικό σύστημα για να υπολογίσουμε τους υπόλοιπους συντελεστές, δηλαδή τους* $a_{r-1}, \cdots, a_0$*. Η τεχνική αυτή είναι ιδιαίτερα βολική (από την άποψη του πλήθους πράξεων) αν κάποιος θέλει να υπολογίσει και το ελάχιστο αλλά και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.*

Ας το δούμε πιο συγκεκριμένα σε ένα παράδειγμα όπου θα υπολογίσουμε πρώτα το ελάχιστο πολυώνυμο και έπειτα το χαρακτηριστικό.

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

θα κατασκευάσουμε τον πίνακα B *χρησιμοποιώντας τους* I, A, A^2, A^3*. Έχουμε*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 21 & -87 \\ 0 & 2 & -4 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 114 \\ 1 & 1 & 13 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

και ο αναγμένος κλιμακωτός του είναι

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 & -30 \\ 0 & 1 & -2 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Το πλήθος των ηγετικών μονάδων είναι 2 επομένως ο βαθμός του ελαχίστου πολυωνύμου είναι 2. Θέτουμε $a_2 = 1$ και $a_3 = 0$ και λύνοντας ως προς τους υπόλοιπους έχουμε ότι (δες την τρίτη στήλη του αναγμένου κλιμακωτού)

$$q(k) = k^2 + 2k - 15 = (k+5)(k-3) \quad \text{(ελάχιστο πολυώνυμο)}$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} a_0 + 15a_2 - 30a_3 &= 0 \\ a_1 - 2a_2 + 19a_3 &= 0 \end{aligned}$$

έχει άπειρες λύσεις. Ακόμη και αν θέσουμε $a_3 = 1$ έχουμε άπειρες επιλογές για το a_2. Δηλαδή υπάρχουν άπειρα πολυώνυμα βαθμού 3 με μεγιστοβάθμιο συντελεστή την μονάδα τα οποία μηδενίζονται από τον πίνακα A. Για τον λόγο αυτόν συνεχίζουμε θέτοντας $a_2 = -\operatorname{trace} A = -1$ εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο των Leverrier - Faddeev. Έτσι καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{aligned} a_0 &= 45 \\ a_1 &= -21 \end{aligned}$$

το οποίο προφανώς έχει μοναδική λύση. 'ρα τελικά το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$\delta_A(k) = k^3 - k^2 - 21k + 45$$

Προφανώς θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε τον αλγόριθμο των Leverrier - Faddeev για να υπολογίσουμε και τους υπόλοιπους συντελεστές. Εφόσον όμως έχουμε ήδη υπολογίσει το ελάχιστο πολυώνυμο με την μέθοδο απαλοιφής του Gauss είναι προτιμότερο να υπολογίσουμε τους εναπομείναντες συντελεστές χρησιμοποιώντας το γραμμικό σύστημα 3. □

Υπολογισμός του A^n για $n \in \mathbb{N}$

Υπολογίζουμε τις ρίζες του ελάχιστου πολυωνύμου. Έστω ότι οι ρίζες του ελάχιστου πολυωνύμου είναι οι $k_1, \cdots, k_l$ πολλαπλότητας $p_1, \cdots, p_l$ και έστω ότι είναι βαθμού r. Έστω $v(k) = a_{r-1}k^{r-1} + \cdots + a_o$ ένα άγνωστο πολυώνυμο (το οποίο θα υπολογίσουμε παρακάτω). Τότε, θέτοντας $f(k) = k^n$, κατασκευάζουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα με άγνωστους τους συντελεστές του πολυωνύμου $v(k)$,

$$\begin{aligned} v^{(i)}(k_1) &= f^{(i)}(k_1), \quad i = 0, \cdots, p_1 - 1 \\ &\vdots \\ v^{(i)}(k_l) &= f^{(i)}(k_l), \quad i = 0, \cdots, p_l - 1 \end{aligned}$$

όπου με $f^{(i)}(k_j)$ εννοούμε την i-οστή παράγωγο της συνάρτησης f υπολογισμένη στο σημείο k_j. Το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση (δες βιβλίο [3] σχετικά) από την οποία παίρνουμε το πολυώνυμο $v(k)$. Αποδεικνύεται ότι $A^n = v(A) = a_{r-1}A^{r-1} + \cdots + a_0 I$.

Εάν δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο αλλά έχουμε υπολογίσει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο τότε κάνουμε ακριβώς την ίδια εργασία χρησιμοποιώντας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Στην περίπτωση αυτή όμως το (άγνωστο) πολυώνυμο $v(k)$ θα είναι βαθμού $m-1$, μεγαλύτερο από το αντίστοιχο πολυώνυμο στην περίπτωση χρήσης του ελάχιστου πολυωνύμου.

Υπολογισμός του A^{-n} για $n \in \mathbb{N}$

Στην περίπτωση που ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τον A^{-n} (και άρα και τον A^{-1}) αν έχουμε ήδη υπολογίσει τον A^n. Ισχύει το παρακάτω θεώρημα (δες [3], σελίδα 287).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 (Η μορφή των στοιχείων του A^{-n}) *Έστω ότι ο πίνακας $A_{m\times m}$ είναι αντιστρέψιμος. Αν το (i,j) στοιχείο του A^n είναι το $a_{ij}(n)$ τότε το (i,j) στοιχείο του A^{-n} είναι το $a_{ij}(-n)$. Ειδικότερα τα στοιχεία του A^{-1} είναι τα $a_{ij}(-1)$.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3 (Γενικευμένος Αντίστροφος) *Ακόμη και στην περίπτωση που ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος υπάρχει πάντοτε ο πίνακας B με στοιχεία τα $a_{ij}(-1)$. Ο πίνακας B σε αυτή την περίπτωση είναι ο Drazin γενικευμένος αντίστροφος του A και συμβολίζεται με A^D (δες [1], και συγκεκριμένα την απόδειξη του θεωρήματος 7.5.2 καθώς και την απόδειξη του θεωρήματος 560 του [3]). Στο [1] μπορεί να δει κανείς και εφαρμογές αυτού του γενικευμένου αντιστρόφου, ειδικά στις Μαρκοβιανές αλυσίδες και στις διαφορικές εξισώσεις. Συνεπώς, ένας τρόπος υπολογισμού του Drazin γενικευμένου αντιστρόφου του A είναι ο υπολογισμός του A^n (με οποιαδήποτε μέθοδο) και στην συνέχεια του B ο οποίος έχει ως στοιχεία τα $a_{ij}(-1)$. Στο [1] θα βρει κανείς και άλλους τρόπους υπολογισμού αυτού του γενικευμένου αντιστρόφου.*

Υπολογισμός του εκθετικού πίνακα e^{tA}

Έστω ο πίνακας $A_{n\times n}$ με ιδιοτιμές τις $k_1, \cdots, k_m$ πολλαπλότητας $r_1, \cdots, r_m$ (με $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$), δηλαδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A έχει την μορφή $\delta_A(k) = (k-k_1)^{r_1}\cdot(k-k_2)^{r_2}\cdots(k-k_m)^{r_m}$. Θα υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα e^{tA} (δες [3]). Θα υπολογίσουμε ένα πολυώνυμο $n-1$ βαθμού, δηλαδή $v(k) = b_{n-1}k^{n-1} + \cdots + b_0$, έτσι ώστε αν $f(x) = e^{tx}$ να ισχύει

$$\begin{aligned} v^{(i)}(k_1) &= f^{(i)}(k_1), \quad i = 0, \cdots, r_1 - 1 \\ &\vdots \\ v^{(i)}(k_m) &= f^{(i)}(k_m), \quad i = 0, \cdots, r_m - 1 \end{aligned}$$

όπου με $v^{(i)}$ και $f^{(i)}$ εννοούμε την i-οστή παράγωγο της συνάρτησης. Για $i = 0$ εννοούμε την ίδια την συνάρτηση (χωρίς παράγωγο).

Ο εκθετικός πίνακας e^{tA} θα είναι ο πίνακας $v(A) = b_{n-1}A^{n-1} + \cdots + b_0 I_{n\times n}$. Η μέθοδος αυτή οδηγεί πάντοτε στον υπολογισμό του ζητούμενου πίνακα είτε ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος είτε όχι. Σημειώστε ότι αν θέσουμε $f(x) = x^n$ και ακολουθήσουμε όλα τα προηγούμενα βήματα, ο πίνακας $v(A)$ θα είναι ίσος με τον A^n. Προφανώς, μπορούμε να υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα χρησιμοποιώντας το ελάχιστο πολυώνυμο οπότε σε αυτή την περίπτωση το πολυώνυμο $v(k)$ θα είναι ένα βαθμό μικρότερο από το ελάχιστο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4 (Υπολογισμός Ιδιοτιμών) *Είδαμε μια μέθοδο υπολογισμού του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και επίσης μια μέθοδο υπολογισμού του ελάχιστου πολυωνύμου. Στην περίπτωση που ο πίνακας είναι μεγάλης διάστασης ίσως είναι αρκετά χρονοβόρο να υπολογίσει κανείς τις ιδιοτιμές μέσω του χαρακτηριστικού. Η εύρεση του ελάχιστου πολυωνύμου σε μερικές περιπτώσεις μπορεί να είναι η λύση στο πρόβλημα χρόνου, όταν (και αν) δηλαδή το ελάχιστο πολυώνυμο είναι πολύ μικρότερου βαθμού από το χαρακτηριστικό και επομένως είναι ευκολότερο να υπολογίσει κανείς τις ιδιοτιμές μέσω αυτού. Στους σύγχρονους υπολογιστές οι επεξεργαστές είναι περισσότεροι από ένας. Αυτό σημαίνει ότι κανείς μπορεί να χρησιμοποιήσει δυο επεξεργαστές, έναν για την κάθε μέθοδο. Με τον τρόπο αυτό θα έχει πάντοτε το επιθυμητό αποτέλεσμα στον συντομότερο δυνατό χρόνο. Σε μια τέτοια αντιμετώπιση του θέματος ίσως παίξει σημαντικό ρόλο το γεγονός ότι οι r ηγετικές μονάδες θα βρίσκονται στις r πρώτες στήλες του αναγμένου κλιμακωτού του πίνακα B. Δηλαδή, για παράδειγμα, αν το ελάχιστο πολυώνυμο είναι δευτέρου βαθμού τότε αρκεί να εργαστούμε στις τρεις πρώτες στήλες του B για να υπολογίσουμε τον αναγμένο κλιμακωτό και να πάρουμε το ελάχιστο πολυώνυμο. Επιστρατεύοντας περισσότερους επεξεργαστές, μπορούμε να «αναθέσουμε» σε έναν να εργαστεί στις τρεις πρώτες στήλες, σε έναν άλλο στις έξι πρώτες στήλες κ.τ.λ. Εν τέλει, επειδή υπάρχουν και άλλες τεχνικές εύρεσης ιδιοτιμών (επαναληπτικές για παράδειγμα, δες σχετικά σε βιβλία Αριθμητικής Ανάλυσης) μπορούμε να τις εφαρμόζουμε όλες ταυτόχρονα σε διαφορετικούς επεξεργαστές έτσι ώστε να πάρουμε την απάντηση στον συντομότερο δυνατό χρόνο.* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **5** *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Θα υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη A^n *και τον εκθετικό πίνακα* e^{tA}. *Στην προκειμένη περίπτωση, επειδή ο πίνακας είναι κάτω τριγωνικός και μικρός σε διάσταση, δεν έχει κανένα νόημα να υπολογίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο. Λόγω του ότι είναι κάτω τριγωνικός οι ιδιοτιμές του βρίσκονται στην διαγώνιο, οπότε είναι οι* $k_1 = 1$ *πολλαπλότητας 1 και* $k_2 = 0.6$ *πολλαπλότητας 2. Συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το* $d_A(k) = (k-1)(k-0.6)^2$. *Παρόλα αυτά, θα υπολογίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο με την μέθοδο που έχουμε περιγράψει ως ένα ακόμη παράδειγμα.*

Για να υπολογίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο κατασκευάζουμε έναν πίνακα $B_{9\times 4}$ *όπου στην πρώτη στήλη τοποθετούμε τον μοναδιαίο πίνακα, στην δεύτερη τον πίνακα* A, *στην τρίτη τον* A^2 *και στην τέταρτη τον* A^3. *Προκύπτει λοιπόν ο πίνακας*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.4 & 0.64 & 0.784 \\ 0 & 0 & 0.16 & 0.352 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.6 & 0.36 & 0.216 \\ 0 & 0.4 & 0.48 & 0.432 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.6 & 0.36 & 0.216 \end{bmatrix}$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον αναγμένο κλιμακωτό του ο οποίος στην *προκειμένη περίπτωση είναι ο*

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.36 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & -1.56 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 2.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Το πλήθος των ηγετικών μονάδων μας δίνει τον βαθμό του ελάχιστου πολυωνύμου. Εδώ δηλαδή έχουμε τρεις ηγετικές μονάδες επομένως ο βαθμός του ελάχιστου πολυωνύμου είναι τρία. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι συμπίπτει με το χαρακτηριστικό και ότι επιπλέον ο πίνακας A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος. Η στήλη που βρίσκεται αμέσως μετά την τελευταία ηγετική μονάδα, περιέχει τους συντελεστές του ελάχιστου πολυωνύμου με αντίθετο πρόσημο. Δηλαδή το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το

$$-0.36 + 1.56k - 2.2k^2 + k^3$$

Θα υπολογίσουμε τώρα την νιοστή δύναμη του A και τον εκθετικό πίνακα e^{tA}. Θέτουμε $f(x) = x^n$ και $g(x) = e^{tx}$. Κατασκευάζουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} a + b + c &= f(1) \quad \text{(ή) } g(1) \\ 0.36a + 0.6b + c &= f(0.6) \quad \text{(ή) } g(0.6) \\ 1.2a + b &= f^{'}(0.6) \quad \text{(ή) } g^{'}(0.6) \end{aligned}$$

Ο πίνακας του γραμμικού αυτού συστήματος είναι ο

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.36 & 0.6 & 1 \\ 1.2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Όπως έχουμε αποδείξει, ο πίνακας αυτός είναι πάντοτε αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του στην προκειμένη περίπτωση είναι ο

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 6.25 & -6.25 & -2.5 \\ -7.5 & 7.5 & 4 \\ 2.25 & -1.25 & -1.5 \end{bmatrix}$$

Επομένως το διάνυσμα (a, b, c) *θα είναι ίσο με* $F^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f(1) \\ f(0.6) \\ f'(0.6) \end{bmatrix}$ *για την περίπτωση της νιοστής δύναμης του* A *ή* $F^{-1} \cdot \begin{bmatrix} g(1) \\ g(0.6) \\ g'(0.6) \end{bmatrix}$ *για την περίπτωση του εκθετικού πίνακα.*

Για την νιοστή δύναμη του A *προκύπτει ότι*

$$\begin{aligned} a &= 6.25 - 6.25 \cdot 0.6^n - 2.5 \cdot n \cdot 0.6^{n-1} \\ b &= -7.5 + 7.5 \cdot 0.6^n + 4 \cdot n \cdot 0.6^{n-1} \\ c &= 2.25 - 1.25 \cdot 0.6^n - 1.5 \cdot n \cdot 0.6^{n-1} \end{aligned}$$

και επομένως η νιοστή δύναμη του A *είναι ο πίνακας* $A^n = aA^2 + bA + c\mathbb{I}$, *δηλαδή*

$$A^n = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 - 0.6^n & 0.6^n & 0.0 \\ 1. - 0.6^n - 0.4 \cdot n \cdot 0.6^{n-1} & 0.4 \cdot n \cdot 0.6^n & 0.6^n \end{bmatrix}$$

Ως επαλήθευση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επαγωγή και να διαπιστώσουμε ότι πράγματι πρόκειται για την νιοστή δύναμη του A. *Επιπλέον, θέτοντας όπου* n *το* -1 *λαμβάνουμε τον αντίστροφο του πίνακα* A *(δες θεώρημα 2).*

Για τον εκθετικό πίνακα θα έχουμε

$$\begin{aligned} a &= 6.25 \cdot e^t - 6.25 \cdot e^{0.6t} - 2.5 \cdot t \cdot e^{0.6t} \\ b &= -7.5 \cdot e^t + 7.5 \cdot e^{0.6t} + 4te^{0.6t} \\ c &= 2.25 \cdot e^t - 1.25 \cdot e^{0.6t} - 1.5 \cdot t \cdot e^{0.6t} \end{aligned}$$

Επομένως ο εκθετικός πίνακας θα είναι ο $e^{tA} = aA^2 + bA + c\mathbb{I}$, *δηλαδή*

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & 0.0 & 0.0 \\ e^t - e^{0.6t} & e^{0.6t} & 0.0 \\ e^t - e^{0.6t} - 0.4te^{0.6t} & 0.4\,te^{0.6\,t} & e^{0.6\,t} \end{bmatrix}$$

Για επαλήθευση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ο πίνακας e^{tA} είναι ο μοναδικός πίνακας που ικανοποιεί την επόμενη διαφορική εξίσωση πινάκων (δες αντίστοιχη παράγραφο στα συστήματα διαφορικών εξισώσεων)

$$\begin{aligned} P^{'}(t) &= AP(t) \\ P(0) &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

Αν υπολογίσουμε τον $(e^{tA})^{'}$ *(παραγωγίζοντας ως προς* t *κάθε στοιχείο του) θα πρέπει να ισχύει ότι* $e^{tA} \cdot A = (e^{tA})^{'}$ *καθώς και ότι* $e^{0 \cdot A} = \mathbb{I}$*. Πράγματι, διαπιστώνουμε ότι ισχύει και επομένως έχουμε το συμπέρασμα ότι ο πίνακας που υπολογίσαμε είναι πράγματι ο εκθετικός.* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 *Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν πίνακα* A *του οποίου το ελάχιστο πολυώνυμο είναι μικρότερο του χαρακτηριστικού. Αν υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα με το χαρακτηριστικό και με το ελάχιστο θα προκύψει το ίδιο αποτέλεσμα (δες [3]). Ας το δούμε αυτό σε προηγούμενο παράδειγμα. Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα αυτού είναι το $\delta_A(k) = (k-3)^2(k+5)$ *ενώ το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το* $m_A(k) = (k-3)(k+5)$*. Ας υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του* A *χρησιμοποιώντας το ελάχιστο πολυώνυμο. Κατασκευάζουμε ένα πολυώνυμο βαθμού ένα, δηλαδή το* $v(k) = ak+b$ *και στην συνέχεια δημιουργώ τις εξισώσεις*

$$\begin{aligned} (-5)a + b &= (-5)^n \\ 3a + b &= 3^n \end{aligned}$$

Ο πίνακας του συστήματος αυτού είναι ο

$$F = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

και ο αντιστροφός του είναι ο

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} -1/8 & 1/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{bmatrix}$$

Επομένως το διάνυσμα $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *είναι το* $\begin{bmatrix} -1/8\ (-5)^n + 1/8\,3^n \\ 3/8\ (-5)^n + 5/8\,3^n \end{bmatrix}$. *Οπότε η νιοστή δύναμη του πίνακα A θα είναι*

$$A^n = aA + b\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 3/4\ (-5)^n + 1/4\,3^n & -3/4\ (-5)^n + 3/4\,3^n & 0 \\ -1/4\ (-5)^n + 1/4\,3^n & 1/4\ (-5)^n + 3/4\,3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

Επαληθεύεται με επαγωγή ότι πράγματι πρόκειται για την νιοστή δύναμη του A. Επίσης, θέτοντας όπου n το −1 λαμβάνουμε τον αντίστροφο του A. Μπορείτε να «μαντέψετε» την μορφή που έχει ο εκθετικός πίνακας; Επαληθεύστε το!

Ας υπολογίσουμε στην συνέχεια την νιοστή δύναμη χρησιμοποιώντας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Κατασκευάζουμε ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, το $v(k) = ak^2 + bk + c$ *και στην συνέχεια τις εξισώσεις*

$$\begin{aligned} 25a - 5b + c &= (-5)^n \\ 9a + 3b + c &= 3^n \\ 6a + b &= n3^{n-1} \end{aligned}$$

Ο πίνακας του συστήματος και ο αντίστροφος του είναι

$$F = \begin{bmatrix} 25 & -5 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad F^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{64} & -\frac{1}{64} & 1/8 \\ -\frac{3}{32} & \frac{3}{32} & 1/4 \\ \frac{9}{64} & \frac{55}{64} & -\frac{15}{8} \end{bmatrix}$$

Συνεπώς η λύση του παραπάνω συστήματος είναι

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-5)^n}{64} - \frac{3^n}{64} + 1/8\,n3^{n-1} \\ -\frac{3\,(-5)^n}{32} + \frac{3\,3^n}{32} + 1/4\,n3^{n-1} \\ \frac{9\,(-5)^n}{64} + \frac{55\,3^n}{64} - \frac{15\,n3^{n-1}}{8} \end{bmatrix}$$

Στην συνέχεια για να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη θα υπολογίσουμε τον πίνακα $aA^2 + bA + c\mathbb{I}$. *Διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για τον ίδιο πίνακα που έχουμε ήδη υπολογίσει.*

Το κέρδος του υπολογισμού της νιοστής δύναμης, χρησιμοποιώντας το ελάχιστο πολυώνυμο, του παραπάνω πίνακα ήταν καταρχάς στον υπολογισμό των ιδιοτιμών. Πράγματι, ήταν ευκολότερο να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές βρίσκοντας τις ρίζες ενός πολυωνύμου δευτέρου βαθμού σε σχέση με τις ρίζες ενός πολυωνύμου τρίτου βαθμού. Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας το ελάχιστο πολυώνυμο *έπρεπε να λύσουμε ένα σύστημα εξισώσεων με δυο αγνώστους και δυο εξισώσεις ενώ στην περίπτωση του χαρακτηριστικού έπρεπε να λύσουμε ένα σύστημα εξισώσεων με τρεις αγνώστους και τρεις εξισώσεις. Σε περιπτώσεις μεγαλύτερων πινάκων η διαφορά μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερη.* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 (Μιγαδικές Ιδιοτιμές) *Θα υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα αυτού είναι οι $k_1 = 3 + \sqrt{2}i$ *και* $k_2 = 3 - \sqrt{2}i$. *Στην περίπτωση των μιγαδικών ιδιοτιμών είναι προτιμότερο να τους μετατρέψουμε στην πολική τους μορφή, δηλαδή να υπολογίσουμε τα* r, θ *τ.ω. να γράφεται ο κάθε αριθμός στην μορφή* $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. *Αρκεί να θέσουμε* $\theta = \arctan\frac{\sqrt{2}}{3}$ *και* $r = \sqrt{3^2+2} = \sqrt{11}$. *Οπότε*

$$k_1 = \sqrt{11}\left(\cos\left(\arctan\frac{\sqrt{2}}{3}\right) + i\sin\left(\arctan\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)$$

και

$$k_2 = \sqrt{11}\left(\cos\left(\arctan\frac{\sqrt{2}}{3}\right) - i\sin\left(\arctan\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)$$

Στην συνέχεια κατασκευάζουμε ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού, το $v(k) = ak + b$. *Για να υπολογίσουμε τους* a, b *σχηματίζουμε τις παρακάτω εξισώσεις*

$$\begin{aligned} ak_1 + b &= k_1^n \\ ak_2 + b &= k_2^n \end{aligned}$$

Εξισώνοντας πραγματικά μέρη με πραγματικά και φανταστικά μέρη με φανταστικά προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} a\sqrt{11}\cos\left(\arctan\frac{\sqrt{2}}{3}\right) + b &= (\sqrt{11})^n\cos\left(n\arctan\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \\ a\sqrt{11}\sin\left(\arctan\frac{\sqrt{2}}{3}\right) &= (\sqrt{11})^n\sin\left(n\arctan\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι

$$[r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))]^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Ο πίνακας F και ο αντίστροφος του F^{-1} του συστήματος αυτού είναι

$$F = \begin{bmatrix} 3.0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2\sqrt{2} \\ 1 & -1.5\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Επομένως έχουμε ότι

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{11}\right)^n \sin\left(n \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) \\ \left(\sqrt{11}\right)^n \cos\left(n \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) - 1.5\sqrt{2}\left(\sqrt{11}\right)^n \sin\left(n \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) \end{bmatrix}$$

Συνεπώς $A^n = aA + b\mathbb{I}$, δηλαδή

$$A^n = \begin{bmatrix} \left(\sqrt{11}\right)^n \cos\left(n \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) & \sqrt{2}\left(\sqrt{11}\right)^n \sin\left(n \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{11}\right)^n \sin\left(n \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) & \left(\sqrt{11}\right)^n \cos\left(n \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες μπορεί να αποδειχθεί επαγωγικά ότι πρόκειται πράγματι για την νιοστή δύναμη του πίνακα A. Σημειώστε όμως ότι θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε ως A τον

$$A = \begin{bmatrix} \left(\sqrt{11}\right) \cos\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) & \sqrt{2}\left(\sqrt{11}\right) \sin\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{11}\right) \sin\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) & \left(\sqrt{11}\right) \cos\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) \end{bmatrix}$$

Στην μορφή του A^n, θέτοντας όπου n το -1 λαμβάνουμε τον αντίστροφο του πίνακα A, δηλαδή τον

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\sqrt{11}\right)^{-1} \cos\left(-\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) & \sqrt{2}\left(\sqrt{11}\right)^{-1} \sin\left(-\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{11}\right)^{-1} \sin\left(-\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) & \left(\sqrt{11}\right)^{-1} \cos\left(-\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) \end{bmatrix}$$

το οποίο μπορεί να επαληθευθεί χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Θα υπολογίσουμε και τον εκθετικό πίνακα e^{tA}. Θεωρώντας το πολυώνυμο $v(k) = ak + b$ σχηματίζουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} ak_1 + b &= e^{tk_1} \\ ak_2 + b &= e^{tk_2} \end{aligned}$$

Όμως

$$e^{tk_1} = e^{t(3+i\sqrt{2})} = e^{3t}\cos(\sqrt{2}t) + ie^{3t}\sin(\sqrt{2}t)$$

Το παραπάνω λοιπόν σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} a\sqrt{11}\cos\left(\arctan\frac{\sqrt{2}}{3}\right)+b &= e^{3t}\cos(\sqrt{2}t) \\ a\sqrt{11}\sin\left(\arctan\frac{\sqrt{2}}{3}\right) &= e^{3t}\sin(\sqrt{2}t) \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος είναι το διάνυσμα $F^{-1}\cdot\left[\begin{array}{c} \mathrm{e}^{3\,t}\cos\left(t\sqrt{2}\right) \\ \mathrm{e}^{3\,t}\sin\left(t\sqrt{2}\right) \end{array}\right]$. *Επομένως ο εκθετικός πίνακας θα είναι ο* $e^{tA}=aA+b\mathbb{I}$, *δηλαδή*

$$e^{tA}=\left[\begin{array}{cc} \mathrm{e}^{3\,t}\cos\left(t\sqrt{2}\right) & \sqrt{2}\mathrm{e}^{3\,t}\sin\left(t\sqrt{2}\right) \\ -1/2\,\sqrt{2}\mathrm{e}^{3\,t}\sin\left(t\sqrt{2}\right) & \mathrm{e}^{3\,t}\cos\left(t\sqrt{2}\right) \end{array}\right]$$

Ως επαλήθευση, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο παραπάνω πίνακας είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης πινάκων $P^{'}(t)=P(t)A, P(0)=\mathbb{I}$. □

Παραδειγμα 8 (Πίνακας μιγαδικών αριθμών) *Έστω ο πίνακας*

$$A=\left[\begin{array}{cc} 1-2\,i & 0 \\ 3 & 1-2\,i \end{array}\right]$$

Ο πίνακας αυτός έχει μια ιδιοτιμή πολλαπλότητας δυο, την $k_1=1-2i$.

Για να υπολογίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο θα κατασκευάσουμε έναν πίνακα $B_{4\times 3}$ *ο οποίος στην πρώτη στήλη θα έχει τον μοναδιαίο, στην δεύτερη τον* A *και στην τρίτη τον* A^2. *Θα έχουμε λοιπόν*

$$B=\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1-2\,i & -3-4\,i \\ 0 & 3 & 6-12\,i \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-2\,i & -3-4\,i \end{array}\right]$$

Ο αναγμένος κλιμακωτός θα είναι ο

$$\hat{B}=\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3+4\,i \\ 0 & 1 & 2-4\,i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το $m_A(k) = k^2 - (2-4i)k - (3+4i) = (k-(1-2i))^2$ *(δείτε το πλήθος των ηγετικών μονάδων και τους συντελεστές στην τρίτη στήλη). Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας δεν είναι διαγωνοποιήσιμος. Κατασκευάζουμε ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού, το* $v(k) = ak + b$ *τέτοιο ώστε να ικανοποιεί τις εξισώσεις*

$$\begin{aligned} a(1-2i)+b &= (1-2i)^n \\ a &= n(1-2i)^{n-1} \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα υπολογίζουμε τα a, b *και στην συνέχεια τον* A^n *ο οποίος θα είναι*

$$A^n = \left[\begin{array}{cc} (1-2\,i)^n & 0 \\ 3\,n\,(1-2\,i)^{n-1} & (1-2\,i)^n \end{array} \right]$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι πράγματι είναι η νιοστή δύναμη του πίνακα A*. Θέτοντας όπου* n *το* -1 *λαμβάνουμε τον πίνακα*

$$\left[\begin{array}{cc} 1/5 + 2/5\,i & 0 \\ \frac{9}{25} - \frac{12\,i}{25} & 1/5 + 2/5\,i \end{array} \right]$$

ο οποίος είναι ο αντίστροφος του πίνακα A*.*

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον εκθετικό πίνακα. Σχηματίζουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} a(1-2i)+b &= e^{t(1-2i)} \\ a &= te^{t(1-2i)} \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα υπολογίζουμε τους a, b *και στην συνέχεια θα έχουμε*

$$e^{tA} = \left[\begin{array}{cc} \mathrm{e}^{(1-2\,i)t} & 0 \\ 3\,t\mathrm{e}^{(1-2\,i)t} & \mathrm{e}^{(1-2\,i)t} \end{array} \right]$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι ο παραπάνω πίνακας ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση πινάκων $P'(t) = P(t)A, P(0) = \mathbb{I}$ *και επομένως πράγματι πρόκειται για τον εκθετικό πίνακα.* $\square$

Περισσότερες λεπτομέρειες και εφαρμογές θα βρει κανείς στο [3] και στις αναφορές που υπάρχουν σε αυτό.

Βιβλιογραφία

[1] S. Cambell - C. Meyer, Generelized Inverses of Linear Trasformations, SIAM, 2009.

[2] Shui-Hung Hou, A simple proof of the Leverrier - Faddeev characteristic polynomial algorithm, SIAM REV, Vol. 40, No. 3, pp. 706 - 709, 1998.

[3] Νίκος Χαλιδιάς, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Οικονομολόγους και Μηχανικούς*, εκδόσεις Broken Hill, 2021, κωδικός Ευδόξου 98785217.

[4] C. Moler - C. Van Loan, *Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty - five years later*, SIAM Review, 2003.