

# Εύρεση της $n$ -οστής δύναμης ενός πίνακα εφαρμόζοντας το θεώρημα των Cayley-Hamilton

ΝΙΚΟΣ ΧΑΛΙΔΙΑΣ

Μαθηματικό Τμήμα

κατεύθυνση Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Έστω ένα πολυώνυμο  $p(k)$  βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του  $n$  και έστω ο πίνακας  $A_{n \times n}$ . Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το  $p(A)$  τότε διαιρούμε το  $p(k)$  με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $\delta_A(k)$  του  $A$  και βλέπουμε ότι  $p(A) = \delta_A(A)\pi(A) + v(A) = v(A)$  όπου  $v(k)$  είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης διότι  $\delta_A(A) = 0$ .

Συνεπώς το θεώρημα Cayley - Hamilton μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό της  $n$ -οστής δύναμης ενός πίνακα. Έστω ένας πίνακας  $A_{m \times m}$  και έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την  $n$ -οστή του δύναμη. Διαιρούμε (θεωρητικά) το  $k^n$  με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και έχουμε  $k^n = \delta_A(k)\pi(k) + v(k)$  όπου  $v(k)$  είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης και προφανώς είναι βαθμού μικρότερου ή ίσου του  $m - 1$ . Αυτό που πρέπει να υπολογίσουμε είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου  $v(k)$  οι οποίοι είναι το πολύ  $m$ . Σε αυτό θα μας βοηθήσουν οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  διότι θα ικανοποιούν την εξίσωση  $k_i^n = \delta_A(k_i)\pi(k_i) + v(k_i) = v(k_i)$  λόγω του ότι είναι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Στην περίπτωση που κάποια ιδιοτιμή είναι πολλαπλότητας δυο ή παραπάνω τότε φτιάχνουμε τις επιπλέον εξισώσεις που χρειαζόμαστε παραγωγίζοντας την εξίσωση  $k^n = \delta_A(k)\pi(k) + v(k)$  ως προς  $k$  και έπειτα αντικαθιστούμε την ιδιοτιμή. Δηλαδή, αν μια ιδιοτιμή είναι πολλαπλότητας  $l$  τότε θα κατασκευάσουμε μια εξίσωση αντικαθιστώντας την ιδιοτιμή στην ισότητα  $k^n = \delta_A(k)\pi(k) + v(k)$  και άλλες  $l - 1$  εξισώσεις παραγωγίζοντας την ισότητα αυτή  $l - 1$  φορές και αντικαθιστώντας κάθε φορά την ιδιοτιμή αυτή. Έτσι, κάθε ιδιοτιμή πολλαπλότητας  $l$  θα προσφέρει  $l$  διαφορετικές εξισώσεις. Επομένως, αν το πολυώνυμο  $v(k)$  είναι  $m - 1$  βαθμού τότε χρειαζόμαστε  $m$  εξισώσεις ενώ οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, έστω οι  $z_1, \dots, z_t$  πολλαπλότητας  $l_1, \dots, l_t$  αντίστοιχα, θα είναι τέτοιες ώστε  $l_1 + \dots + l_t = m$ .

Στην περίπτωση όπου έχουμε μιγαδικές ρίζες τις φέρνουμε στην πολική μορφή τους, δηλαδή αν  $z = x + iy$  είναι μια ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου την γράφουμε στην μορφή  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  όπου  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  και  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ . Αν  $z$  είναι μια μιγαδική ρίζα τότε επίσης ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου θα είναι και η συζυγής της. Είναι ιδιαίτερα βολικό το σύστημα εξισώσεων που θα προκύψει να μην περιέχει μιγαδικούς αριθμούς. Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει μιγαδικές ρίζες τότε το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων για τον

υπολογισμό του  $v(k)$  θα περιέχει εξισώσεις με μιγαδικούς αριθμούς οι οποίες μάλιστα θα είναι ανά ζεύγη. Θα υπάρχει δηλαδή μια εξίσωση με δεξί μέλος τον μιγαδικό αριθμό  $z^n$  και άλλη μια με δεξί μέλος τον αριθμό  $\bar{z}^n$ . Σε αυτές τις περιπτώσεις αντικαθιστούμε τις δυο αυτές εξισώσεις με την εξίσωση που προκύπτει αν προσθέσουμε τις εξισώσεις κατά μέλη και με την εξίσωση που θα προκύψει αν αφαιρέσουμε τις εξισώσεις κατά μέλη.

Αφού υπολογίσουμε το πολυώνυμο  $v(k)$ , τότε από την σχέση  $k^n = \delta_A(k)\pi(k) + v(k)$  και βάζοντας όπου  $k$  τον πίνακα  $A$  προκύπτει ότι  $A^n = v(A)$  αφού από το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε ότι  $\delta_A(A) = 0$ .

Με το θεώρημα των Cayley-Hamilton μπορούμε πάντοτε (σε αντίθεση με την μέθοδο της διαγωνοποίησης) να υπολογίσουμε την  $n$ -οστή δύναμη ενός πίνακα (είτε έχει πραγματικές ιδιοτιμές είτε μιγαδικές ανεξαρτήτου πολλαπλότητας) διότι το πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα παρεμβολής τύπου Hermite. Σύμφωνα με το θεώρημα 2.2.2 του βιβλίου P. Davis, *Interpolation and Approximation*, Dover, 1975 το πρόβλημα αυτό έχει πάντοτε λύση και είναι μοναδική. Επιπλέον, ακόμη και όταν ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος, είναι προτιμότερο από την άποψη του πλήθους των πράξεων να εφαρμόζουμε την μέθοδο που στηρίζεται στο θεώρημα των Cayley-Hamilton.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1** Θα υπολογίσουμε την  $n$ -οστή δύναμη του πίνακα  $P$  όπου

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

εφαρμόζοντας το θεώρημα των Cayley-Hamilton. Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα οι οποίες είναι  $k_1 = 1$  και  $k_2 = 3$ . Στην συνέχεια γράφουμε

$$k^n = t(k)\delta_P(k) + v(k)$$

δηλαδή διαιρούμε (θεωρητικά) το  $k^n$  με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $\delta_P(k)$  οπότε το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού, το  $v(k) = ak + b$ . Εφαρμόζοντας το θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε ότι  $P^n = v(P)$  αφού  $\delta_P(P) = 0$  από το θεώρημα των Cayley-Hamilton. Αυτό σημαίνει ότι αρκεί να υπολογίσουμε τους  $a, b$ . Για να το κάνουμε αυτό χρειαζόμαστε δυο εξισώσεις με αγνώστους τα  $a, b$ . Αντικαθιστώντας τις δυο ιδιοτιμές στην εξίσωση  $k^n = t(k)\delta_P(k) + v(k)$  προκύπτει το σύστημα των δυο εξισώσεων

$$\begin{aligned} 1^n &= a + b \\ 3^n &= 3a + b \end{aligned}$$

του οποίου η λύση είναι  $a = \frac{3^n-1}{2}$  και  $b = \frac{3}{2}(1 - 3^{n-1})$ . Άρα

$$P^n = aP + bI_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ \frac{3^n-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2** Θα υπολογίσουμε την  $n$ -οστή δύναμη του πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές είναι οι  $k_1 = 3$  (διπλή) και  $k_2 = -5$  δηλαδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το  $\delta_P(k) = (k - 3)^2(k + 5)$ .

Διαιρούμε θεωρητικά το  $k^n$  με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και έχουμε  $k^n = t(k)\delta_P(k) + v(k)$  όπου  $v(k) = ak^2 + bk + c$ . Πρέπει να σχηματίσουμε τρεις εξισώσεις με αγνώστους τους  $a, b, c$ . Αντικαθιστώντας την ιδιοτιμή  $k_1 = 3$  στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι  $3^n = 9a + 3b + c$ . Αντικαθιστώντας την ιδιοτιμή  $-5$  έχουμε ακόμη μια εξίσωση η οποία είναι  $(-1)^n 5 = 25a - 5b + c$ . Για να πάρουμε ακόμη μια εξίσωση παραγωγίζουμε την σχέση  $k^n = t(k)\delta_P(k) + v(k)$  μια φορά και αντικαθιστούμε την ιδιοτιμή 3. Αυτό κάνουμε πάντα όταν έχουμε ιδιοτιμές πολλαπλότητας δυο και πάνω. Αν δηλαδή μια ιδιοτιμή είναι πολλαπλότητας  $m$  τότε θα παραγωγίσουμε την σχέση αυτή διαδοχικά  $m - 1$  φορές (και σε κάθε παραγωγή αντικαθιστούμε την ιδιοτιμή για να λάβουμε μια εξίσωση) για να λάβουμε ακόμη  $m - 1$  εξισώσεις.

Οπότε προκύπτει η εξίσωση  $3^{n-1}n = 6a + b$ . Λύνοντας τις τρεις αυτές εξισώσεις υπολογίζουμε τους  $a, b, c$ . Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον  $P^2$  ο οποίος είναι

$$P^2 = \begin{pmatrix} 21 & -12 & 0 \\ -4 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Τελικά

$$P^n = aP^2 + bP + c = \begin{pmatrix} 21a - 3a + c & -12a + 6b & 0 \\ -4a + 2b & 13a + b + c & 0 \\ 0 & 0 & 9a + 3b + c \end{pmatrix}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3** Θα υπολογίσουμε την  $n$ -οστή δύναμη του πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το  $\delta_P(k) = (k-1)^3(k-2)^2$ . Έχει δηλαδή δυο ιδιοτιμές πολλαπλότητας 3 και 2 αντίστοιχα.

Διαιρούμε θεωρητικά το  $k^n$  με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και έχουμε  $k^n = t(k)\delta_P(k) + v(k)$  όπου  $v(k) = a_4k^4 + a_3k^3 + a_2k^2 + a_1k + a_0$ . Πρέπει να σχηματίσουμε 5 εξισώσεις με αγνώστους τους  $a_0, \dots, a_4$ . Για να γίνει αυτό θα παραγωγίσουμε κατάλληλα την εξίσωση  $k^n = t(k)\delta_P(k) + v(k)$ . Αντικαθιστώντας τις δυο ιδιοτιμές στην εξίσωση αυτή λαμβάνουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} 1^n &= a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \\ 2^n &= 2^4a_4 + 2^3a_3 + 2^2a_2 + 2a_1 + a_0 \end{aligned}$$

Στην συνέχεια παραγωγίζουμε μια φορά την εξίσωση  $k^n = t(k)\delta_P(k) + v(k)$  και έχουμε  $nk^{n-1} = t'(k)\delta_P(k) + t(k)\delta'_P(k) + v'(k)$ . Στην τελευταία αυτή εξίσωση αντικαθιστούμε τις δυο ιδιοτιμές και έτσι λαμβάνουμε ακόμη δυο εξισώσεις οι οποίες είναι

$$\begin{aligned} n &= 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 \\ 2^{n-1}n &= 4 \cdot 2^3a_4 + 3 \cdot 2^2a_3 + 2 \cdot 2a_2 + a_1 \end{aligned}$$

Τέλος, παραγωγίζουμε ακόμη μια φορά την ισότητα

$$nk^{n-1} = t'(k)\delta_P(k) + t(k)\delta'_P(k) + v'(k)$$

και έχουμε  $n(n-1)k^{n-2} = t''(k)\delta_P(k) + 2t'(k)\delta'_P(k) + t(k)\delta''_P(k) + v''(k)$ . Αντικαθιστούμε στην εξίσωση αυτή την ιδιοτιμή 1 λαμβάνοντας έτσι την πέμπτη ισότητα η οποία είναι

$$n(n-1) = 12a_4 + 6a_3 + 2a_2$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τους πίνακες  $P^4, P^3, P^2$  και σχηματίζουμε τον πίνακα  $P^n$  ο οποίος θα είναι  $P^n = a_4P^4 + a_3P^3 + a_2P^2 + a_1P + a_0I_{5 \times 5}$ .

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4** Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα των Cayley-Hamilton για να υπολογίσουμε την  $n$ -οστή δύναμη πινάκων με μιγαδικές ιδιοτιμές. Ας δούμε πως εργαζόμαστε στην περίπτωση αυτή σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Έστω ο πίνακας

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός έχει ιδιοτιμές τους  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{6}$  και  $k_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{6}$ .

Διαιρούμε (θεωρητικά) το  $k^n$  με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $P$  και έχουμε  $k^n = \delta_P(k)t(k) + v(k)$  όπου  $v(k) = ak^2 + bk + c$  ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Στην συνέχεια αντικαθιστούμε τις τρεις ιδιοτιμές στην εξίσωση αυτή. Κάθε μιγαδικό αριθμό  $x + iy$  τον μετατρέπουμε στην πολική του μορφή ως εξής  $x + iy = r(\cos \phi + i \sin \phi)$  όπου  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  και  $\phi = \arctan \frac{y}{x}$ . Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{1}{3} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ k_3 &= \frac{1}{3} \left( \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις ιδιοτιμές στην εξίσωση  $k^n = \delta_P(k)t(k) + v(k)$  έχουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} 1^n &= a + b + c \\ \frac{1}{3^n} \left( \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right) &= a \frac{1}{3^2} \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) + b \frac{1}{3} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) + c \\ \frac{1}{3^n} \left( \cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3} \right) &= a \frac{1}{3^2} \left( \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right) + b \frac{1}{3} \left( \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) + c \end{aligned}$$

Προσθέτοντας την δεύτερη εξίσωση με την τρίτη προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{1}{3^n} \cos \frac{n\pi}{3} = a \frac{1}{3^2} \cos \frac{2\pi}{3} + b \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{3} + c$$

ενώ αν αφαιρέσουμε την τρίτη από την δεύτερη προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{1}{3^n} \sin \frac{n\pi}{3} = a \frac{1}{3^2} \sin \frac{2\pi}{3} + b \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{3}$$

Τελικά έχουμε τρεις εξισώσεις με τρεις αγνώστους οι οποίες είναι

$$\begin{aligned} 1^n &= a + b + c \\ \frac{1}{3^n} \cos \frac{n\pi}{3} &= a \frac{1}{3^2} \cos \frac{2\pi}{3} + b \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{3} + c \\ \frac{1}{3^n} \sin \frac{n\pi}{3} &= a \frac{1}{3^2} \sin \frac{2\pi}{3} + b \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Λύνοντας τις εξισώσεις λαμβάνουμε τους πραγματικούς αριθμούς  $a, b, c$  οι οποίοι είναι

$$\begin{aligned} a &= -\frac{3\sqrt{3}}{7} \left( \sqrt{3} \frac{1}{3^n} \cos \frac{n\pi}{3} - \sqrt{3} + 5 \frac{1}{3^n} \sin \frac{n\pi}{3} \right) \\ b &= \frac{\sqrt{3}}{7} \left( \sqrt{3} \frac{1}{3^n} \cos \frac{n\pi}{3} - \sqrt{3} + 19 \frac{1}{3^n} \sin \frac{n\pi}{3} \right) \\ c &= \frac{\sqrt{3}}{21} \left( 6\sqrt{3} \frac{1}{3^n} \cos \frac{n\pi}{3} + \sqrt{3} - 12 \frac{1}{3^n} \sin \frac{n\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

και έτσι  $P^n = aP^2 + bP + cI_{2 \times 2}$ .

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5** Θα υπολογίσουμε την  $n$ -οστή δύναμη του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το  $\delta_P(k) = (k - 4)^2$ . Έχει δηλαδή μια ιδιοτιμή πολλαπλότητας 2. Αν προσπαθήσουμε να διαγωνοποιήσουμε τον πίνακα θα δούμε ότι έχει μονάχα ένα ιδιοδιάνυσμα το  $v = (1, 1)$  επομένως ο πίνακας δεν είναι διαγωνοποιήσιμος. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα των Cayley-Hamilton. Διαιρούμε θεωρητικά το  $k^n$  με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και έχουμε  $k^n = \delta_P(k)t(k) + v(k)$  όπου  $v(k) = ak + b$ . Πρέπει να κατασκευάσουμε δυο εξισώσεις με αγνώστους τους  $a, b$ . Η πρώτη εξίσωση προκύπτει αντικαθιστώντας την ιδιοτιμή στην εξίσωση  $k^n = \delta_P(k)t(k) + v(k)$  η οποία είναι  $4a + b = 4^n$ . Για να προκύψει και μια δεύτερη θα παραγωγίσουμε την εξίσωση  $k^n = \delta_P(k)t(k) + v(k)$  και έπειτα θα αντικαταστήσουμε την ιδιοτιμή. Έτσι προκύπτει η εξίσωση  $a = n4^{n-1}$ . Τελικά

$b = 4^n(1 - n)$  και  $a = 4^{n-1}n$ . Άρα από το θεώρημα των Cayley-Hamilton προκύπτει ότι

$$A^n = aA + bI_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 5n4^{n-1} + 4^n(1 - n) & -4^{n-1}n \\ n4^{n-1} & 3n4^{n-1} + 4^n(1 - n) \end{pmatrix}$$

### Ελάχιστο πολυώνυμο

Για την περίπτωση υπολογισμού της  $n$ -οστής δύναμης ενός πίνακα  $A$  το ελάχιστο πολυώνυμο  $q(k)$  μπορεί να παίξει σημαντικό ρόλο διότι μπορεί να αντικαταστήσει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μιας και  $q(A) = 0$ . Υποθέστε για παράδειγμα ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $\delta_A(k)$  είναι το  $\delta_A(k) = (k - 1)^5(k - 2)^4$ . Στην περίπτωση αυτή, διαιρώντας το  $k^n$  με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα προκύψει ως υπόλοιπο ένα πολυώνυμο όγδοου βαθμού. Για να το υπολογίσουμε θα χρειαστούμε 9 εξισώσεις άρα οι πράξεις είναι σημαντικά πολλές. Υποθέστε όμως ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα είναι το  $q(k) = (k - 1)(k - 2)$ . Μπορούμε να διαιρέσουμε με αυτό το  $k^n$  και από την διαίρεση θα προκύψει ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Θα χρειαστούμε μονάχα δυο εξισώσεις για να το υπολογίσουμε. Επομένως είναι σημαντικό να γνωρίζουμε το ελάχιστο πολυώνυμο σε τέτοιου είδους περιπτώσεις. Σε μια τέτοια περίπτωση δοκιμάζουμε μήπως ο πίνακας  $A$  μηδενίζει το  $(k - 1)(k - 2)$  οπότε θα είναι το ελάχιστο πολυώνυμο. Μπορούμε να συνεχίσουμε με τον τρόπο αυτό (δοκιμάζοντας) για να εντοπίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο το οποίο θα έχει την μορφή  $(k - 1)^{r_1}(k - 2)^{r_2}$ .

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε (και θα τυποποιήσουμε) την κλασική διαδικασία εύρεσης του ελαχίστου πολυωνύμου που στηρίζεται στην απαλοιφή Gauss αν και το πλήθος των πράξεων είναι επίσης μεγάλο. Το πλεονέκτημα της διαδικασίας αυτής είναι ότι δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Υπάρχουν και άλλες (πιο περίπλοκες) τεχνικές εύρεσης του ελαχίστου πολυωνύμου με μικρότερο πλήθος πράξεων.

### Μεθοδολογία εύρεσης του ελαχίστου πολυωνύμου

Έστω  $A_{n \times n}$  και  $\delta(k) = k^n + b_{n-1}k^{n-1} + \dots + b_0$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμό του. Προφανώς  $\delta(A) = 0$ .

Έστω ότι το ελάχιστο πολυώνυμο έχει την μορφή

$$q(k) = k^r + a_{r-1}k^{r-1} + \dots + a_0$$

με  $r \leq n$ .

Προφανώς η σχέση

$$b_{r-1}A^{r-1} + \cdots + b_0I_{n \times n} = 0_{n \times n} \quad (1)$$

μας οδηγεί στο ότι  $b_{r-1} = b_{r-2} = \cdots = b_0 = 0$  διότι αλλιώς θα υπήρχε πολυώνυμο μικρότερου βαθμού το οποίο να μηδενίζεται από τον  $A$ . Δηλαδή, οι πίνακες  $I_{n \times n}, A, \cdots, A^{r-1}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι ενώ οι  $I_{n \times n}, A, \cdots, A^{r-1}, A^r$  είναι γραμμικώς εξαρτημένοι. Προφανώς και οι πίνακες

$$I_{n \times n}, A, \cdots, A^{r-1}, A^r, A^{r+1}, \cdots, A^n$$

είναι επίσης γραμμικώς εξαρτημένοι.

Έστω  $C_{n^2 \times r}$  ο πίνακας ο οποίος στην πρώτη στήλη είναι τοποθετημένα τα στοιχεία του μοναδιαίου πίνακα. Δηλαδή στις  $n$  πρώτες θέσεις της πρώτης στήλης βρίσκεται η πρώτη στήλη του μοναδιαίου, στις επόμενες  $n$  θέσεις βρίσκεται η δεύτερη στήλη του μοναδιαίου κ.τ.λ. Στις  $n$  πρώτες θέσεις της δεύτερης στήλης τοποθετούμε την πρώτη στήλη του  $A$ , στις επόμενες  $n$  θέσεις την δεύτερη στήλη του  $A$  κ.τ.λ. Συνεχίζουμε έτσι γεμίζοντας τις στήλες του πίνακα  $C$  τοποθετώντας και τον πίνακα  $A^{r-1}$ . Ο πίνακας που κατασκευάσαμε είναι ο πίνακας των εξισώσεων 1. Εφόσον οι πίνακες  $I, A, A^2, \cdots, A^{r-1}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι τότε ο αναγμένος κλιμακωτός πίνακας του  $C$  θα έχει την μορφή

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

όπου το πλήθος των ηγετικών μονάδων είναι ίσο με  $r$ .

Έστω  $D_{n^2 \times (n+1-r)}$  ο πίνακας ο οποίος περιέχει στις στήλες του τους πίνακες  $A^r, \cdots, A^n$  με τον ίδιο τρόπο όπως κατασκευάσαμε τον  $C$ . Κατασκευάζουμε τον πίνακα  $B = (C|D)$  (ο οποίος είναι ο πίνακας του συστήματος 2) και υπολογίζουμε τον αναγμένο κλιμακωτό πίνακά του. Προφανώς, το πλήθος των ηγετικών μονάδων θα είναι ίσο με  $r$  οι οποίες θα είναι τοποθετημένες στις  $r$  πρώτες στήλες του πίνακα  $B$ .

Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα

$$a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_0 I_{n \times n} = 0_{n \times n} \quad (2)$$



έχει άπειρες λύσεις με  $n + 1 - r$  ελεύθερες παραμέτρους. Θέτουμε τον άγνωστο  $a_r = 1$  και τους  $a_{r+1} = a_{r+2} = \dots = a_n = 0$  και λύνουμε ως προς τους υπόλοιπους. Τότε το πολυώνυμο

$$q(k) = a_0 + a_1k + \dots + a_{r-1}k^{r-1} + k^r$$

είναι τέτοιο ώστε  $q(A) = 0$  και είναι στην πραγματικότητα το ελάχιστο πολυώνυμο του  $A$ . Το ότι είναι το ελάχιστο προκύπτει από το γεγονός ότι οι  $I, A, \dots, A^{r-1}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι και το ότι έχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου τη μονάδα.

Συνοψίζοντας, αν  $A_{n \times n}$  ένας δοσμένος πίνακας τότε κατασκευάζουμε τον πίνακα  $B_{n^2 \times (n+1)}$  ο οποίος περιέχει στις στήλες του τους πίνακες  $I, A, \dots, A^n$ . Υπολογίζουμε τον αναγμένο κλιμακωτό  $\hat{B}$ . Το πλήθος  $r$  των ηγετικών μονάδων (οι οποίες θα βρίσκονται στις  $r$  πρώτες στήλες) μας δίνουν τον βαθμό του ελαχίστου πολυωνύμου. Στην συνέχεια εργαζόμαστε στο σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει από τον αναγμένο κλιμακωτό του  $B$  θέτοντας τον άγνωστο  $a_r = 1$  και τους  $a_{r+1} = \dots = a_n = 0$ . Λύνουμε ως προς τους υπόλοιπους αγνώστους λαμβάνοντας έτσι τους συντελεστές του ελαχίστου πολυωνύμου. Το αποτέλεσμα θα είναι ότι το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το

$$q(k) = k^r - \hat{B}_{r,r+1}k^{r-1} - \hat{B}_{r-1,r+1}k^{r-2} - \dots - \hat{B}_{1,r+1}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6** Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Θα υπολογίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο. Για τον σκοπό αυτό θα κατασκευάσουμε τον πίνακα  $B$  χρησιμοποιώντας τους  $I, A, A^2, A^3$ . Ο πίνακας  $B$  είναι

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 12 & -28 \\ 0 & -2 & 10 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 34 \\ 1 & -1 & -3 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και ο αναγμένος κλιμακωτός του είναι

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Συνεπώς το πλήθος των ηγετικών μονάδων είναι 3 το οποίο σημαίνει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο είναι τρίτου βαθμού (και άρα συμπίπτει με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο). Για να το υπολογίσουμε θέτουμε  $a_4 = 1$  και λύνοντας έχουμε ότι  $a_0 = -8$ ,  $a_1 = 3$  και  $a_2 = 4$  (δείτε την τελευταία στήλη του  $\hat{B}$ ). Συνεπώς, το ελάχιστο (και χαρακτηριστικό πολυώνυμο) είναι το

$$q(k) = \delta(k) = k^3 + 4k^2 + 3k - 8$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7** Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

θα κατασκευάσουμε τον πίνακα  $B$  χρησιμοποιώντας τους  $I, A, A^2, A^3$ . Έχουμε

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 21 & -87 \\ 0 & 2 & -4 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 114 \\ 1 & 1 & 13 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

και ο αναγμένος κλιμακωτός του είναι

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 & -30 \\ 0 & 1 & -2 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Το πλήθος των ηγετικών μονάδων είναι 2 επομένως ο βαθμός του ελαχίστου πολυωνύμου είναι 2. Θέτουμε  $a_2 = 1$  και  $a_3 = 0$  και λύνοντας ως προς τους υπόλοιπους έχουμε ότι (δες την τρίτη στήλη του αναγμένου κλιμακωτού)

$$q(k) = k^2 + 2k - 15 = (k + 5)(k - 3)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας  $A$  έχει ιδιοτιμές τις  $k_1 = -5$  και  $k_2 = 3$ .

Η εύρεση της  $n$ -οστής δύναμης ενός πίνακα είναι μέρος ενός γενικότερου προβλήματος το οποίο είναι (ο ορισμός και) η εύρεση συνάρτησης ενός πίνακα. Για τον λόγο αυτό παρουσιάζουμε το επόμενο παράδειγμα.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 (ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ)** Έστω  $A_{n \times n}$  ένας τετραγωνικός πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $\delta_A(k)$  και μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι καλά ορισμένη στις ιδιοτιμές του  $A$ . Έστω ότι προσεγγίζουμε την συνάρτηση  $f$  στις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  με ένα πολυώνυμο  $m$  βαθμού, το  $p(k)$ . Διαιρώντας το  $p(k)$  με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$  προκύπτει ότι

$$p(k) = \pi(k)\delta_A(k) + v(k)$$

όπου  $v(k)$  είναι ένα πολυώνυμο το πολύ  $n - 1$  βαθμού μιας και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι  $n$  βαθμού. Μπορούμε να υπολογίσουμε το  $v(k)$  (κατά τα γνωστά) κατασκευάζοντας  $n$  εξισώσεις χρησιμοποιώντας τις ιδιοτιμές του  $A$ . Για παράδειγμα, αντικαθιστώντας το  $k$  με την  $k_1$  ιδιοτιμή προκύπτει η εξίσωση

$$v(k_1) = p(k_1)$$

Επειδή το πολυώνυμο  $p(k)$  προσεγγίζει την  $f(x)$  μπορούμε να αντικαταστήσουμε το δεξί μέλος με την τιμή της  $f$  στην  $k_1$  (προκειμένου να έχουμε καλύτερη ακρίβεια) δηλαδή θα προκύψει η εξίσωση

$$v(k_1) = f(k_1)$$

Αν μια ιδιοτιμή είναι πολλαπλότητας δύο ή παραπάνω τότε σχηματίζουμε τις επιπλέον εξισώσεις παραγωγίζοντας και έτσι θα έχουμε για παράδειγμα

$$v'(k_1) = f'(k_1)$$

υποθέτοντας ότι η παράγωγος της  $f$  είναι καλά ορισμένη στις ιδιοτιμές. Με τον τρόπο αυτόν θα υπολογίσουμε το πολυώνυμο  $v(k)$  και ορίζουμε ως  $f(A)$  να είναι

το  $v(A)$ , δηλαδή  $f(A) := v(A)$ . Με αυτή την μέθοδο υπολογίζονται συναρτήσεις πινάκων σε μαθηματικό λογισμικό όπως για παράδειγμα στο **MAPLE**.

Παρατηρήστε ότι το πολυώνυμο  $v(k)$  είναι ανεξάρτητο του πολυωνύμου  $p(k)$  και προφανώς του βαθμού του. Δηλαδή, με οσοδήποτε μεγάλου βαθμού πολυώνυμο  $p$  προσεγγίσουμε την  $f(x)$  στις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  θα καταλήξουμε στο ίδιο υπόλοιπο  $v(k)$  διαιρώντας με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο πίνακας  $v(A)$  εξαρτάται μονάχα από την συνάρτηση  $f$  και τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  και όχι από την οποιαδήποτε προσέγγιση της συνάρτησης  $f$ .

Ας το δούμε σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ο οποίος έχει ως ιδιοτιμή την  $k = 4$  πολλαπλότητας δύο. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι δεν είναι διαγωνοποιήσιμος επομένως δεν μπορούμε (μέσω διαγωνοποίησης) να υπολογίσουμε έναν πίνακα  $B$  τέτοιον ώστε  $B^2 = A$ . Θα προσπαθήσουμε να το κάνουμε εφαρμόζοντας τα παραπάνω. Θα πρέπει να δημιουργήσουμε δυο εξισώσεις με αγνώστους τους συντελεστές  $a$  και  $b$  του πολυωνύμου  $v(k) = ak + b$ . Εδώ  $f(x) = \sqrt{x}$  η οποία είναι καλά ορισμένη στην ιδιοτιμή του  $A$  όπως επίσης και η παράγωγος της. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} 4a + b &= f(4) = 2 \\ a &= f'(4) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Επομένως υπολογίσαμε το πολυώνυμο  $v(k)$  το οποίο είναι  $v(k) = \frac{1}{4}k + 1$ . Δηλαδή ο πίνακας  $B = v(A) = \frac{1}{4}A + \mathbb{I}_{2 \times 2}$  θα είναι τέτοιος ώστε  $B^2 = A$ . Κάνοντας τους υπολογισμούς διαπιστώνουμε ότι πράγματι ισχύει.

Μπορούμε να γενικεύσουμε τους υπολογισμούς μας και να υπολογίσουμε τον  $A^t$  όπου  $t \in \mathbb{R}$ . Διαλέγουμε  $f(x) = x^t$  και όπως πριν υπολογίζουμε τα  $a, b$  τα οποία είναι τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} a &= t4^{t-1} \\ b &= (1-t)4^t \end{aligned}$$

Άρα ο πίνακας  $A^t$  είναι ως εξής

$$A^t = \begin{pmatrix} 5t4^{t-1} + (1-t)4^t & -t4^{t-1} \\ t4^{t-1} & 3t4^{t-1} + (1-t)4^t \end{pmatrix}$$

και μάλιστα βλέπουμε ότι  $A^t \rightarrow I_{2 \times 2}$  καθώς  $t \rightarrow 0$ . Επιπλέον, θέτοντας  $t = -1$  έχουμε στα χέρια μας τον αντίστροφο του  $A$ .

Για παράδειγμα ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

δεν είναι αντιστρέψιμος. Βλέπουμε επίσης ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^t$  είναι καλά ορισμένη στις ιδιοτιμές μονάχα όταν  $t > 0$  άρα μπορούμε να υπολογίσουμε δυνάμεις του πίνακα αλλά μόνο θετικές. Έτσι έχουμε ότι

$$B^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 \cdot 2^{t-1} \\ 0 & 2^t \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

Σημειώστε ότι ο  $B^t$  δεν συγκλίνει στον μοναδιαίο καθώς  $t \rightarrow 0$ . □

### Βιβλιογραφία

- [1] P. Davis, *Interpolation and Approximation*, Dover, 1975.
- [2] Νίκος Χαλιδιάς, Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, 2017.