

Νίκος Χαλιδιάς

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

email: nick@aegean.gr

Μετασχηματισμοί *Fourier* και *Laplace*

Στις σημειώσεις αυτές θα μελετήσουμε δυο βασικούς ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς, τους μετασχηματισμούς Fourier και Laplace. Θα δώσουμε επίσης και μια φυσική επέκταση των μετασχηματισμών αυτών, τον συμμετρικό μετασχηματισμό Laplace, ο οποίος έχει τα πλεονεκτήματα και των δυο προηγούμενων μετασχηματισμών. Οι σημειώσεις αυτές στηρίζονται στο βιβλίο [8].

1 Μετασχηματισμός Fourier

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ μια δοσμένη συνάρτηση. Ορίζουμε την $F(s)$ με $s \in \mathbb{R}$ ως εξής

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt$$

αν το ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο. Η συνάρτηση $F(s)$ ονομάζεται ο μετασχηματισμός Fourier της f . Συχνά, συμβολίζεται και με $\mathcal{F}(f)(s)$.

Σε αυτό τον ορισμό χρησιμοποιούμε την σχέση (φόρμουλα του Euler)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (Η ΣΤΗΝΑΡΤΗΣΗ Heaviside) Έστω η συνάρτηση

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } t \geq 0 \\ 0, & \text{όταν } t < 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται συνάρτηση Heaviside. Θα δούμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτής δεν ορίζεται. Πράγματι,

$$\mathcal{F}\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t)e^{-ist} dt = \int_0^{\infty} e^{-ist} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-ist} dt$$

Επομένως, αφού $(e^{-ist})'_t = -ise^{-ist}$ τότε έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t)e^{-ist} dt = \frac{1}{-is} \lim_{A \rightarrow \infty} [e^{-ist}]_{t=0}^{t=A} = \frac{i}{s} \left(\lim_{A \rightarrow \infty} e^{-isA} - 1 \right)$$

Χρησιμοποιήσαμε την διαίρεση μιγαδικών αριθμών για να πάρουμε την ισότητα $\frac{1}{-is} = \frac{i}{s}$. Το όριο όμως

$$\lim_{A \rightarrow \infty} e^{-isA}$$

δεν υπάρχει διότι δεν υπάρχουν τα όρια $\lim_{A \rightarrow \infty} \cos sA$ και $\lim_{A \rightarrow \infty} \sin sA$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ονομάζεται απολύτως ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ όταν

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Το σύνολο των απόλυτα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ συμβολίζεται με $L^1(\mathbb{R})$.

Εδώ το απόλυτο αναφέρεται σε μιγαδικούς αριθμούς, εν γένει. Έτσι, εύκολα βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier μιας απόλυτα ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f(t)$ υπάρχει. Πράγματι,

$$|F(s)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-ist}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |e^{-ist}| dt$$

Επειδή $|e^{-ist}| = 1$ τότε προκύπτει ότι

$$|F(s)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Έστω $a > 0$. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$p_a(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } |t| \leq \frac{a}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι απολύτως ολοκληρώσιμη επομένως υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier. Έχουμε λοιπόν ότι, για $s \neq 0$,

$$\mathcal{F}(p_a)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(t) e^{-ist} dt = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ist} dt = \frac{2 \sin(\frac{a}{2}s)}{s}$$

Για $s = 0$ προκύπτει εύκολα ότι

$$\mathcal{F}(p_a)(0) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} p_a(t) dt = a$$

Χρησιμοποιώντας το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ προκύπτει ότι

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\frac{a}{2}s)}{s} = a$$

και επομένως η συνάρτηση $\mathcal{F}(p_a)(s)$ είναι συνεχής για κάθε $s \in \mathbb{R}$ παρόλο που η $f(t)$ δεν είναι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Έστω $a > 0$. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$q_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a}, & \text{όταν } |t| \leq a \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η συνάρτηση q_a είναι επίσης απολύτως ολοκληρώσιμη επομένως υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(q_a)(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} q_a(t) e^{-ist} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} q_a(t) e^{-ist} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 q_a(t) e^{-ist} dt + \int_0^{\infty} q_a(t) e^{-ist} dt \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $q_a(t)$ είναι άρτια προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}(q_a)(s) = 2 \int_0^{\infty} q_a(t) \cos st dt = 2 \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) \cos st dt$$

Για $s \neq 0$ χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε ότι

$$\mathcal{F}(q_a)(s) = \frac{2}{s} \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) (\sin st)' dt = \frac{2}{as^2} (1 - \cos(as)) = \frac{4 \sin^2(\frac{as}{2})}{as^2}$$

Για $s = 0$ έχουμε ότι $\mathcal{F}(q_a)(0) = a$. Μπορούμε να δούμε εύκολα ότι

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2(\frac{as}{2})}{as^2} = a$$

το οποίο σημαίνει ότι η $\mathcal{F}(q_a)(s)$ είναι συνεχής συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(t) = e^{-a|t|}$ όπου $a > 0$. Έχουμε ότι

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-ist} dt + \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-ist} dt = \frac{2a}{a^2 + s^2}$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$g_a(t) = \begin{cases} e^{-at}, & \text{όταν } t > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου $a \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re} a > 0$. Έχουμε ότι

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t) e^{-ist} dt = \frac{1}{a + is} = \frac{a - is}{a^2 + s^2}$$

Παρόμοια, ισχύει ότι ο μετασχηματισμός *Fourier* της συνάρτησης

$$\hat{g}_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } t \geq 0 \\ e^{at}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι η συνάρτηση $\mathcal{F}(\hat{g}_a)(s) = \frac{a+is}{a^2+s^2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 Θα μετασχηματίσουμε την συνάρτηση $f(t) = e^{-at^2}$ όπου $a > 0$ η οποία ονομάζεται συνάρτηση του *Gauss*. Έχουμε λοιπόν ότι

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-ist} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-at^2} \cos st dt$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης $F(s)$ (υποθέτοντας ότι η παράγωγος μπορεί να περάσει μέσα στο ολοκλήρωμα) και έχουμε

$$F'(s) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \left(e^{-at^2} \right)' \sin st dt$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη προκύπτει ότι

$$F'(s) = -\frac{s}{2a} F(s)$$

Η λύση της γραμμικής αυτής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$F(s) = C e^{-s^2/4a}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t\sqrt{a})^2} \sqrt{a} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

έχουμε τελικά

$$F(s) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-s^2/4a}$$

1.1 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε διάφορες χρήσιμες ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier σε μορφή θεωρημάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 (ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ) Έστω δυο συναρτήσεις f και g με μετασχηματισμούς Fourier τις $F(s)$ και $G(s)$ αντίστοιχα. Τότε ο μετασχηματισμός Fourier του γραμμικού συνδυασμού $af(t) + bg(t)$ είναι η συνάρτηση $aF(s) + bG(s)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του ολοκληρώματος προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(af + bg)(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} (af(t) + bg(t))e^{-ist} dt \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-ist} dt \\ &= aF(s) + bG(s)\end{aligned}$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 (ΣΥΖΥΓΗΣ) Έστω f μια συνάρτηση και $F(s)$ ο μετασχηματισμός Fourier. Τότε, ο μετασχηματισμός της $\bar{f}(t)$ είναι η συνάρτηση $\bar{F}(-s)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε ότι

$$\mathcal{F}(\bar{f})(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t)e^{-ist} dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ist} dt} = \bar{F}(-s)$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 10 Έστω f μια συνάρτηση και $F(s)$ ο μετασχηματισμός Fourier. Τότε για $a \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\mathcal{F}(f(t - a))(s) = e^{-isa}F(s)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $u = t - a$ έχουμε ότι

$$\mathcal{F}(f(t - a))(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - a)e^{-ist} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-is(u+a)} du = e^{-isa}F(s)$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 11 Έστω f μια συνάρτηση και $F(s)$ ο μετασχηματισμός Fourier. Για $a \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\mathcal{F}(e^{iat}f(t))(s) = F(s - a)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

$$\mathcal{F}(e^{iat}f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(s-a)t}dt = F(s-a)$$

□

ΠΟΡΙΣΜΑ 12 Αν F είναι ο μετασχηματισμός Fourier της f τότε

$$\mathcal{F}(f(t)\cos(at))(s) = \frac{F(s-a)}{2} + \frac{F(s+a)}{2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$\cos at = \frac{e^{iat}}{2} + \frac{e^{-iat}}{2}$$

Εφαρμόζοντας την γραμμικότητα του μετασχηματισμού Fourier και το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει εύκολα το αποτέλεσμα. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13 Αν $f(t) = p_a(t)$ τότε σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}(p_a(t)\cos bt)(s) = \frac{\sin(a(s-b)/2)}{s-b} + \frac{\sin(a(s+b)/2)}{s+b}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 14 Έστω $F(s)$ ο μετασχηματισμός Fourier της f . Τότε ο μετασχηματισμός Fourier της $f(ct)$ για $c \neq 0$ είναι

$$\mathcal{F}(f(ct))(s) = \frac{1}{|c|}F\left(\frac{s}{c}\right)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι $c > 0$. Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $u = ct$ έχουμε ότι

$$\mathcal{F}(f(ct))(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(ct)e^{-ist}dt = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-isu/c}du = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$$

Όταν $c < 0$ η απόδειξη είναι παρόμοια. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15 Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα αυτά στην συνάρτηση $p_a(ct)$ έχουμε ότι

$$\mathcal{F}(p_a(ct))(s) = \frac{1}{c} \frac{2 \sin(\frac{as}{2c})}{\frac{s}{c}} = \frac{2 \sin(\frac{as}{2c})}{s}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 16 Έστω f μια άρτια συνάρτηση. Τότε ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτής δίνεται από

$$F(s) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos st dt \quad (\text{συνημιτονικός μετασχηματισμός})$$

η οποία είναι επίσης άρτια συνάρτηση. Αν η f είναι περιττή τότε ο μετασχηματισμός Fourier δίνεται από

$$G(s) = -2i \int_0^{\infty} g(t) \sin st dt \quad (\text{ημιτονικός μετασχηματισμός})$$

η οποία είναι επίσης περιττή συνάρτηση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πράγματι, αν f είναι άρτια τότε

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos st + i \sin st) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t)(\cos st + i \sin st) st dt + \int_0^{\infty} f(t)(\cos st + i \sin st) dt \end{aligned}$$

Αλλάζοντας την μεταβλητή $u = -t$ στο πρώτο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 f(t)(\cos st + i \sin st) dt &= \int_0^{\infty} f(-t)(\cos(-st) + i \sin(-st)) dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t)(\cos st - i \sin st) dt \end{aligned}$$

Άρα

$$F(s) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos st dt$$

Παρόμοια, όταν η f είναι περιττή. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 17 Έστω f και g τμηματικά λείες συναρτήσεις και απολύτως ολοκληρώσιμες με μετασχηματισμούς Fourier F και G αντίστοιχα. Τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)G(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)g(t)dt$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αντικαθιστώντας το $G(t)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)G(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-itx}dx \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x)e^{-itx}dxdt\end{aligned}$$

Στην συνέχεια αλλάζουμε την σειρά ολοκλήρωσης για να πάρουμε το ζητούμενο. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 18 Έστω f μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και F ο μετασχηματισμός Fourier. Αν $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ τότε ο μετασχηματισμός της παραγώγου της f δίνεται από $\mathcal{F}(f')(s) = isF(s)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού η f' είναι συνεχής συνάρτηση προκύπτει ότι

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} \lim_{B \rightarrow \infty} \int_A^B f'(t)e^{-ist}dt = \lim_{B \rightarrow \infty} f(B)e^{-isB} - \lim_{A \rightarrow -\infty} f(A)e^{-isA} + isF(s)$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση του θεωρήματος προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. $\square$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα αυτό σε μια συνάρτηση m -φορές συνεχώς παραγωγίσιμη προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}(f^{(m)})(s) = (is)^m F(s)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19 Η συνάρτηση $f(t) = e^{-at^2}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και η παράγωγος της είναι η $f'(t) = -2ate^{-at^2}$. Επίσης, ισχύει ότι $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-at^2} = 0$. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι

$$\mathcal{F}(f')(s) = is\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-s^2/4a}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 20 Έστω f μια απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μετασχηματισμό Fourier την F . Αν η συνάρτηση $tf(t)$ είναι επίσης απολύτως ολοκληρώσιμη τότε ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και μάλιστα $F'(s) = -\mathcal{F}(itf(t))$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Υπολογίζουμε το όριο του κλάσματος

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(s+h) - F(s)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{-i(s+h)t} - e^{-ist}}{h} dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} \frac{e^{-iht} - 1}{h} dt\end{aligned}$$

Μπορούμε να εναλλάξουμε το ολοκλήρωμα με το όριο και έτσι να πάρουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(s+h) - F(s)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} (-it f(t)) e^{-ist} dt$$

□

Αν $t^k f(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη για $k = 0, 1, 2, \dots, m$ τότε η F είναι m -φορές παραγωγίσιμη και μάλιστα

$$F^{(m)}(s) = \mathcal{F}((-it)^m f(t))$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21 Η συνάρτηση $tp_a(t)$ ικανοποιεί το παραπάνω θεώρημα και έτσι

$$\mathcal{F}(tp_a(t))(s) = -\frac{1}{i} F'(s) = i \frac{a \cos(as/2)}{s} - i \frac{2 \sin(as/2)}{s^2}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 22 Έστω F ο μετασχηματισμός *Fourier* της συνάρτησης f η οποία είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και συνεχής. Έστω $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t f(x) dx = 0$. Τότε για $s \neq 0$ έχουμε ότι

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^t f(x) dx\right) = \frac{F(s)}{is}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε $g(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$. Εφόσον η f είναι συνεχής τότε η g είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και μάλιστα $g'(t) = f(t)$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 20 στην συνάρτηση g και να πάρουμε

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g') = is\mathcal{F}(g)$$

Όταν $s = 0$ έχουμε

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i \cdot 0 \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t f(x) dx = 0$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 23 Αν η f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη τότε ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 24 Η συνέλιξη δυο συναρτήσεων f και g ορίζεται ως εξής

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx \quad \text{για } t \in \mathbb{R}$$

αν το ολοκλήρωμα υπάρχει.

ΛΗΜΜΑ 25 Ισχύει ότι

$$f * g = g * f$$

για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f και g .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $u = t - x$ έχουμε ότι

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)du = (g * f)(t)$$

□

ΛΗΜΜΑ 26 Αν η συνάρτηση f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και η g είναι φραγμένη σε όλο το $\mathbb{R}$ τότε η συνέλιξη $f * g$ υπάρχει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε ότι

$$|(f * g)(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)g(t-x)|dx \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 27 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΥΝΕΛΙΞΗΣ) Έστω f και g κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες είναι απολύτως ολοκληρώσιμες και φραγμένες. Έστω $F(s)$ και $G(s)$ οι μετασχηματισμοί Fourier των f και g αντίστοιχα. Τότε η συνέλιξη $f * g$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση και

$$\mathcal{F}(f * g)(s) = F(s)G(s)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι η συνέλιξη $f * g$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Θα χρειαστούμε το γεγονός ότι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)g(t-x)| dt \right) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(t-x)| dt \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| du \\ &< \infty \end{aligned}$$

Οπότε έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)g(t-x)| dx \right) dt < \infty$$

έχοντας υποθέσει ότι μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά ολοκλήρωσης. Επομένως, η συνάρτηση $f * g$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και άρα υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) e^{-ist} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} g(t-x) e^{-is(t-x)} dx \right) dt \end{aligned}$$

Αλλάζοντας την σειρά ολοκλήρωσης προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}(f * g)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) e^{-is(t-x)} dt \right) dx$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $u = t - x$ έχουμε ότι

$$\mathcal{F}(f * g)(s) = G(s) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx = G(s)F(s)$$

□

1.2 Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

Ο χώρος $L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ των απόλυτα ολοκληρώσιμων και συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος όπως πολύ εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε. Ο μετασχηματισμός Fourier

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}) \rightarrow \text{im } \mathcal{F}$$

όπου $\text{im } \mathcal{F}$ είναι η εικόνα του μετασχηματισμού, είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός το οποίο εύκολα βλέπουμε χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του ολοκληρώματος. Ο πυρήνας του μετασχηματισμού $\ker \mathcal{F}$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις f τέτοιες ώστε $\mathcal{F}(f) = 0$, δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt = 0, \quad \text{για κάθε } s \in \mathbb{R}$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f \geq 0$ που ανήκει στον πυρήνα του μετασχηματισμού. Τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt = 0, \quad \text{για κάθε } s \in \mathbb{R}$$

Διαλέγοντας $s = 0$ προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$$

από το οποίο εύκολα βλέπουμε ότι αναγκαστικά $f = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει γενικότερα, για οποιαδήποτε συνάρτηση f (δες θεώρημα 19.3, σελίδα 248, [11]).

ΘΕΩΡΗΜΑ 28 *Αν η συνάρτηση f είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη και τέτοια ώστε*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt = 0, \quad \text{για κάθε } s \in \mathbb{R}$$

τότε αναγκαστικά $f(t) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Επομένως, ο πυρήνας του μετασχηματισμού Fourier αποτελείται μονάχα από το μηδενικό στοιχείο. Αυτό σημαίνει ότι (δες ;;) ο μετασχηματισμός Fourier είναι 1-1 και άρα αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος είναι επίσης ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Για να προσδιορίσουμε όμως την μορφή που έχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός χρειάζεται να παρουσιάσουμε μερικά αποτελέσματα ακόμη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 29 (Riemann-Lebesgue) *Έστω f μια απολύτως ολοκληρώσιμη και κατά τμήματα λεία συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Τότε*

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} F(s) = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt = 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη τότε υπάρχουν A και B τέτοια ώστε

$$\int_B^\infty |f(t)|dt + \int_{-\infty}^A |f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας το λήμμα ;; έχουμε ότι υπάρχει κάποιο $G > 0$ έτσι ώστε για $|s| > G$ να ισχύει ότι

$$\left| \int_A^B f(t)e^{-ist}dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\left| \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-ist}dt \right| \leq \left| \int_B^\infty |f(t)|dt \right| + \left| \int_{-\infty}^A |f(t)|dt \right| + \left| \int_A^B f(t)e^{-ist}dt \right| < \varepsilon$$

για $|s| > G$ επομένως προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 30 Η τιμή $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(t)dt$, αν υπάρχει, ονομάζεται η *Cauchy κύρια τιμή* του ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^\infty f(t)dt$.

Για παράδειγμα, ενδέχεται το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^\infty f(t)dt$ να μην υπάρχει αλλά να υπάρχει η Cauchy κύρια τιμή του ολοκληρώματος. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^\infty x dx$ της οποίας η κύρια τιμή είναι ίση με το μηδέν αλλά το ολοκλήρωμα δεν υπάρχει.

ΘΕΩΡΗΜΑ 31 Έστω f μια απολύτως ολοκληρώσιμη και τμηματικά λεία συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t-x) \frac{\sin Ax}{x} dx = \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-))$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει η ισότητα

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t-x) \frac{\sin Ax}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (f(t-x) + f(t+x)) \frac{\sin Ax}{x} dx$$

Όμως

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\sin Ax}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$$

Πολλαπλασιάζοντας την ισότητα αυτή με $(f(t+) + f(t-))$ έχουμε ότι

$$\frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin Ax}{x} (f(t+) + f(t-)) dx$$

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε την διαφορά

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty (f(t-x) + f(t+x)) \frac{\sin Ax}{x} dx - \frac{1}{\pi} \int_0^1 (f(t+) + f(t-)) \frac{\sin Ax}{x} dx$$

Η διαφορά αυτή μπορεί να γραφεί στην μορφή $I_1 + I_2$ όπου

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t-x) - f(t-) + f(t+x) - f(t+)}{x} \sin Ax dx \\ I_2 &= \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{f(t-x) + f(t+x)}{x} \sin Ax dx \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι $I_1 \rightarrow 0$ και $I_2 \rightarrow 0$ καθώς $A \rightarrow \infty$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} \frac{f(t-x) - f(t-) + f(t+x) - f(t+)}{x}, & \text{για } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \\ h(x) &= \begin{cases} \frac{f(t-x) + f(t+x)}{x}, & \text{για } x \geq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 g(x) \sin Ax dx \quad \text{και} \quad I_2 = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty h(x) \sin Ax dx$$

Εφαρμόζοντας το ;; βλέπουμε ότι τα I_1 και I_2 συγκλίνουν στο μηδέν. Εύκολα τώρα προκύπτει το αποτέλεσμα. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 32 (ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ Fourier) Έστω f μια απολύτως ολοκληρώσιμη και τμηματικά λεία συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και έστω $F(s)$ ο μετασχηματισμός Fourier. Τότε η Cauchy κύρια τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{ist} ds$$

συγκλίνει και μάλιστα ισχύει ότι

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(s) e^{ist} ds = \frac{1}{2} (f(t+) + f(t-))$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αντικαθιστώντας το $F(s)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A F(s) e^{ist} ds &= \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx \right) e^{ist} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-A}^A e^{is(t-x)} ds \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\sin A(x-s)}{t-s} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) \frac{\sin Ax}{x} dx\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας το όριο καθώς $A \rightarrow \infty$ και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Άρα ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της $F(s)$ είναι ως εξής

$$\mathcal{F}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(s) e^{ist} ds \quad (\text{αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier})$$

Αν η συνάρτηση F είναι απολύτως ολοκληρώσιμη τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{F}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{ist} ds$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 33 Έστω f απόλυτα ολοκληρώσιμη και τμηματικά λεία συνάρτηση με μετασχηματισμό Fourier την $F(s)$. Τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός της F δίνεται ως εξής, όταν η f είναι άρτια

$$\mathcal{F}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(s) \cos(st) ds$$

Παρόμοια, αν η f είναι περιττή, ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνεται από

$$\mathcal{F}^{-1}(F)(t) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} F(s) \sin(st) ds$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(F)(t) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(s) e^{ist} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(s) \cos(st) ds + \frac{i}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(s) \sin(st) ds\end{aligned}$$

Αν η f είναι άρτια τότε εύκολα προκύπτει ότι

$$\int_{-A}^A F(s) \cos(st) ds = 2 \int_0^A F(s) \cos(st) ds \quad \text{και} \quad \int_{-A}^A F(s) \sin(st) ds = 0$$

ενώ αν είναι περιττή

$$\int_{-A}^A F(s) \cos(st) ds = 0 \quad \text{και} \quad \int_{-A}^A F(s) \sin(st) ds = 2 \int_0^A F(s) \sin(st) ds$$

Συνεπώς έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 34 Έστω ότι η συνάρτηση f και ο μετασχηματισμός Fourier F είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αν η f είναι λεία συνάρτηση τότε

$$\mathcal{F}(F)(s) = 2\pi f(-s)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ο μετασχηματισμός Fourier της F υπάρχει διότι η F είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση, επομένως έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-ist} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{i(-s)t} ds \\ &= 2\pi f(-s) \end{aligned}$$

όπου για να πάρουμε την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα 32. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 35 Είχαμε δει τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $e^{-a|t|}$ όπου $a > 0$. Η συνάρτηση αυτή είναι άρτια επομένως για τον αντίστροφο μετασχηματισμό έχουμε ότι

$$e^{-a|t|} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a}{a^2 + s^2} \cos st ds$$

Διαλέγοντας $t = 0$ έχουμε ότι

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a}{a^2 + s^2} ds$$

δηλαδή

$$\int_0^{\infty} \frac{a}{a^2 + s^2} ds = \frac{\pi}{2}$$

για κάθε $a > 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 36 Είχαμε υπολογίσει τον μετασχηματισμό *Fourier* της άρτιας συνάρτησης $p_a(t)$. Συνεπώς ο αντίστροφος μετασχηματισμός θα δίνεται από

$$p_a(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{2 \sin(\frac{a}{2}s)}{s} \cos(st) ds$$

Διαλέγοντας $t = 0$ έχουμε

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{2 \sin(\frac{a}{2}s)}{s} ds$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{a}{2}s$ προκύπτει ότι

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}$$

ένα ολοκλήρωμα το οποίο είχαμε δει στις σειρές *Fourier*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 37 Είχαμε υπολογίσει τον μετασχηματισμό *Fourier* της άρτιας συνάρτησης e^{-at^2} για $a > 0$. Συνεπώς, ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνεται από

$$e^{-at^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{s^2}{4a}} \cos(st) ds$$

Διαλέγοντας $t = 0$ και $a = \frac{1}{4}$ προκύπτει ένα γνωστό ολοκλήρωμα (το οποίο είχαμε υπολογίσει χρησιμοποιώντας διπλά ολοκληρώματα)

$$\int_0^\infty e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 38 Έστω f και g τμηματικά λείες και απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε το γινόμενο τους να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι οι μετασχηματισμοί *Fourier* F και G είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε

$$\mathcal{F}(fg)(s) = \frac{1}{2\pi} (F * G)(s)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε ότι

$$\mathcal{F}(fg)(s) = \int_{-\infty}^\infty f(t)g(t)e^{-ist} ds$$

Αντικαθιστούμε την f με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(fg)(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)g(t)e^{-i(s-x)t} dx dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i(s-x)t} dt \right)}_{G(s-x)} F(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} (F * G)(s)\end{aligned}$$

□

Εφαρμόζοντας το θεώρημα αυτό στις f και $\bar{g}$ έχουμε το επόμενο πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 39 (ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ Parseval) Έστω δυο συναρτήσεις f και g τμηματικά λείες. Υποθέτουμε ότι οι f και $\bar{g}$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες όπως επίσης και το γινόμενό τους. Υποθέτουμε επίσης ότι οι μετασχηματισμοί Fourier F και G των f και g αντίστοιχα είναι τέτοιοι ώστε οι F και $\bar{G}$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε ισχύει η ταυτότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\overline{G(x)} dx \quad (\text{ταυτότητα του Parseval})$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2 ds$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 40 Διαλέγοντας $f = p_a$ έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p_a(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin^2(as/2)}{s^2} ds$$

Το αριστερό ολοκλήρωμα είναι ίσο με a ενώ στο δεξί κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = as/2$ και έτσι προκύπτει ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2} dy = \frac{\pi}{2}$$

Διαλέγοντας $f = p_a$ και $g = p_b$ με $0 < a \leq b$ έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_a(t)p_b(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin(as/2) \sin(bs/2)}{s^2} ds$$

Το αριστερό ολοκλήρωμα είναι ίσο με a ενώ

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin(as/2) \sin(bs/2)}{s^2} ds = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(as/2) \sin(bs/2)}{s^2} ds$$

λόγω του ότι η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι άρτια συνάρτηση. Τελικά έχουμε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(as/2) \sin(bs/2)}{s^2} ds = \frac{\pi}{4} a$$

Στην συνέχεια θέτοντας $y = \frac{a}{2}s$ προκύπτει ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin y \sin(\frac{b}{a}y)}{y^2} dy = \frac{\pi}{2}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 41 Μπορούμε να ορίσουμε ως μετασχηματισμό *Fourier* τον εξής

$$\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ist} dt$$

οπότε ο αντίστροφος θα είναι

$$\mathcal{F}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(s) e^{-ist} ds$$

το οποίο οδηγεί σε ισοδύναμα αποτελέσματα με μικρές διαφορές, όπως για παράδειγμα ο μετασχηματισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης. Επίσης, ο συντελεστής μπροστά από το ολοκλήρωμα μπορεί να επιλεγεί όπως θέλουμε αλλά έπειτα ο αντίστοιχος συντελεστής στον αντίστροφο μετασχηματισμό θα πρέπει να είναι τέτοιος ώστε το γινόμενο των δυο συντελεστών να είναι ίσο με $\frac{1}{2\pi}$. Σε πολλά βιβλία θα δούμε ότι υπάρχουν διαφορές στον ορισμό του μετασχηματισμού *Fourier* όπως περιγράψαμε πιο πριν. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει κανείς να είναι ιδιαίτερα προσεκτικός με την χρήση των πινάκων μετασχηματισμών (δες για παράδειγμα τον πίνακα 1) που συνήθως υπάρχουν διότι αυτοί θα διαφέρουν από βιβλίο σε βιβλίο, ανάλογα με τον ορισμό του μετασχηματισμού που έχει δοθεί.

1.2.1 Υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού *Fourier*

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό *Fourier* μιας συνάρτησης, προφανώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεμελιώδες θεώρημα του μετασχηματισμού *Fourier*. Δεδομένου ότι ο απευθείας υπολογισμός του αντιστρόφου μέσω του

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{ist} ds$	$\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt$
$a > 0, p_a(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } t \leq \frac{a}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$	$\mathcal{F}(p_a)(s) = \begin{cases} \frac{2 \sin(\frac{a}{2}s)}{s}, & \text{όταν } s \neq 0 \\ a, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
$a > 0, q_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{a}, & \text{όταν } t \leq a \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$	$\mathcal{F}(q_a)(s) = \begin{cases} \frac{4 \sin^2(\frac{a}{2}s)}{as^2}, & \text{όταν } s \neq 0 \\ a, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
$a > 0, e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2+s^2}$
$\text{Re } a > 0, g_a(t) = \begin{cases} e^{-at}, & \text{όταν } t > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$	$\mathcal{F}(g_a)(s) = \frac{a-is}{a^2+s^2} = \frac{1}{a+is}$
$a > 0, e^{-at^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-s^2/4a}$
$\text{Re } a > 0, \hat{g}_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } t \geq 0 \\ e^{at}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$	$\mathcal{F}(\hat{g}_a)(s) = \frac{a+is}{a^2+s^2} = \frac{1}{a-is}$

Πίνακας 1: Πίνακας μετασχηματισμών Fourier

θεωρήματος 32 μπορεί να είναι αρκετά δύσκολος, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τον πίνακα 1. Ο πίνακας 1 περιέχει τους μετασχηματισμούς Fourier που έχουμε υπολογίσει στα παραδείγματα που έχουμε δώσει. Έτσι, αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης $\frac{2a}{a^2+s^2}$ θα κοιτάξουμε τον πίνακα μετασχηματισμών και θα δούμε ότι προέρχεται από την συνάρτηση $e^{-a|t|}$. Λόγω του ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι 1-1 είμαστε βέβαιοι ότι δεν υπάρχει άλλη συνάρτηση τέτοια ώστε να έχει τον ίδιο μετασχηματισμό. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό μιας πιο πολύπλοκης συνάρτησης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης

$$2\frac{2a}{a^2+s^2} + 3\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-s^2/4a} \quad \text{όταν } a > 0$$

μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την γραμμικότητα του μετασχηματισμού Fourier και του αντιστρόφου της. Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left(2\frac{2a}{a^2+s^2} + 3\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-s^2/4a}\right) &= 2\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2a}{a^2+s^2}\right) + 3\mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-s^2/4a}\right) \\ &= 2e^{-a|t|} + 3e^{-at^2} \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 42 Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$F(t) = \frac{2a}{a^2+t^2}$$

με $a > 0$ θα δίνεται από

$$\mathcal{F}(F)(s) = 2\pi e^{-a|s|}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το θεώρημα 34 και τον πίνακα 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 43 Θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Fourier για να επιλύσουμε την διαφορική εξίσωση

$$y'(x) + 2y(x) = e^{-|x|}$$

Λαμβάνουμε τον μετασχηματισμό Fourier κατά μέλη της εξίσωσης και έχουμε

$$(is + 2)Y(s) = \frac{2}{1+s^2}$$

ή αλλιώς, αναλύοντας σε απλά κλάσματα,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{(1+s^2)(2+is)} \\ &= \frac{1}{1+is} + \frac{1}{3(1-is)} - \frac{2}{3(2+is)} \\ &= \frac{1-is}{1+s^2} + \frac{1}{3} \frac{1+is}{1+s^2} - \frac{2}{3} \frac{2-is}{4+s^2} \end{aligned}$$

Άρα ο αντίστροφος μετασχηματισμός της Y θα είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(Y) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1-is}{1+s^2}\right) + \frac{1}{3}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1+is}{1+s^2}\right) - \frac{2}{3}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2-is}{4+s^2}\right) \\ &= g_1(x) + \hat{g}_1(x) - \frac{2}{3}g_2(x) \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τον πίνακα μετασχηματισμών. Δηλαδή

$$y(x) = \begin{cases} e^{-x} - \frac{2}{3}e^{-2x}, & \text{όταν } x > 0 \\ \frac{1}{3}e^x, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 44 Έστω ότι η f είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$. Θα μελετήσουμε την συνήθη διαφορική εξίσωση

$$y''(x) - y(x) = f(x) \quad \text{για } x \in \mathbb{R}$$

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Fourier στα δυο μέλη της εξίσωσης και έχουμε

$$((is)^2 - 1)Y(s) = F(s)$$

Άρα

$$Y(s) = -\left(\frac{1}{1+s^2}\right)F(s)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνέλιξης (δες θεώρημα 27) προκύπτει ότι

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)f(y)dy, \quad \text{για } x \in \mathbb{R}$$

όπου $k(x) = -e^{-|x|}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 45 Θα επιλύσουμε την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(u)y(x-u)du = e^{-\lambda|x|} \quad \text{για } x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Μετασχηματίζουμε κατά μέλη με τον μετασχηματισμό *Fourier* την ολοκληρωτική εξίσωση και έπειτα εφαρμόζουμε το θεώρημα συνέλιξης 27 στο αριστερό μέλος, οπότε έχουμε

$$Y(s) = \frac{2\lambda(1+is)}{\lambda^2+s^2} = \frac{2\lambda(1+is)}{(\lambda+is)(\lambda-is)} = \frac{1-\lambda}{\lambda+is} + \frac{1+\lambda}{\lambda-is}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Συνεπώς

$$y(x) = (1-\lambda)g_\lambda(x) + (1+\lambda)\hat{g}_\lambda(x)$$

ή αλλιώς

$$y(x) = \begin{cases} (1-\lambda)e^{-\lambda x}, & \text{όταν } x > 0 \\ (1+\lambda)e^{\lambda x}, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 46 Έχουμε χρησιμοποιήσει στην ενότητα αυτή συχνά αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης χωρίς να έχουμε σταθεί στις προϋποθέσεις που απαιτούνται για να μπορεί να γίνει αυτό. Ένα σχετικό βιβλίο το οποίο περιγράφει αυτές τις διαδικασίες είναι το [23]. Επίσης, έχουμε χρησιμοποιήσει το λεγόμενο θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του *Lebesgue* (*Lebesgue's Dominated Convergence Theorem*) το οποίο μας δίνει τις προϋποθέσεις για να γίνει εναλλαγή ορίου με ολοκλήρωμα χωρίς επίσης να έχουμε αναφερθεί σε αυτό. Τέτοιου είδους αποτελέσματα βρίσκονται σε βιβλία ανάλυσης (δες για παράδειγμα [28]).

2 Μετασχηματισμός *Laplace*

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τον μετασχηματισμό *Laplace*. Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 47 Έστω $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ και $s \in \mathbb{C}$. Ορίζουμε ως μετασχηματισμό *Laplace* της f τον επόμενο ολοκληρωτικό μετασχηματισμό

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

όπου $s = x + iy$, αν το ολοκλήρωμα υπάρχει.

Είναι δυνατόν να ορίσουμε και τον λεγόμενο δίπλευρο μετασχηματισμό Laplace του οποίου ο ορισμός είναι ο επόμενος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 48 Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ και $s \in \mathbb{C}$. Ορίζουμε ως δίπλευρο μετασχηματισμό Laplace τον επόμενο ολοκληρωτικό μετασχηματισμό

$$\mathcal{DL}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

όπου $s = x + iy$, αν το ολοκλήρωμα υπάρχει.

Η σχέση του δίπλευρου μετασχηματισμού Laplace και του (απλού) μετασχηματισμού Laplace είναι προφανής αφού ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{DL}(f(t))(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-(-s)t} f(-t) dt \\ &= \mathcal{L}(f(t))(s) + \mathcal{L}(f(-t))(-s) \end{aligned} \quad (1)$$

Θέτοντας $g(t) = e^{-xt} f(t)$ (όταν $s = x + iy$) τότε ο δίπλευρος μετασχηματισμός Laplace της f είναι ίσος με τον μετασχηματισμό Fourier της g , δηλαδή ισχύει ότι

$$\mathcal{DL}(f)(s) = \mathcal{F}(g)(y), \quad s = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Τέλος, θα ορίσουμε τον συμμετρικό μετασχηματισμό Laplace του οποίου ο ορισμός είναι ο επόμενος (δες [18]).

ΟΡΙΣΜΟΣ 49 Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Ορίζουμε ως συμμετρικό μετασχηματισμό Laplace τον επόμενο ολοκληρωτικό μετασχηματισμό

$$\mathcal{SL}(f)(x_1, x_2, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-x_1 H(t) + x_2 H(-t) - iy)t} f(t) dt$$

$$\text{όπου } H(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } t \geq 0 \\ 0, & \text{όταν } t < 0 \end{cases}$$

Αν διαλέξουμε στον ορισμό αυτό $x_1 = -x_2 = x$ και $s = x + iy$ τότε προφανώς ισχύει ότι

$$\mathcal{SL}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-(-s)t} f(-t) dt = \mathcal{L}(f)(s) + \mathcal{L}(f(-t))(-s)$$

άρα συμπίπτει με τον δίπλευρο μετασχηματισμό Laplace. Αν όμως διαλέξουμε $x_1 = x_2 = x$ και $s = x + iy$ τότε

$$\mathcal{SL}(f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) + \mathcal{L}(f(-t))(\bar{s}) \quad (2)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 50 Έστω $f(t) = 1$ για κάθε $t \geq 0$. Ισχύει ότι, όταν $s \in \mathbb{C}$ και τέτοιο ώστε $s \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{e^{st}}{s} &= \frac{e^{x+iy}}{x+iy} \\ &= \frac{e^{xt}(\cos yt + i \sin yt)(x - iy)}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{e^{xt}}{x^2 + y^2} ((x \cos yt + y \sin yt) + i(x \sin yt - y \cos yt))\end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά έχουμε ότι

$$\int e^{st} dt = \int e^{(x+iy)t} dt = \frac{e^{xt}}{x^2 + y^2} ((x \cos yt + y \sin yt) + i(x \sin yt - y \cos yt))$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\int e^{st} dt = \frac{e^{st}}{s}$$

όταν $s \neq 0$.

Επομένως έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-sA}}{-s} + \frac{1}{s} \right)$$

Όμως το όριο, δεδομένου ότι $s = x + iy$,

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{-sA}}{-s} = \lim_{A \rightarrow \infty} e^{-xA} (\cos(-yA) + i \sin(-yA))$$

υπάρχει μονάχα όταν $x > 0$ ή αλλιώς $\operatorname{Re} s > 0$ και είναι ίσο με μηδέν. Τελικά,

$$\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s} \quad \text{όταν } \operatorname{Re} s > 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 51 Θα υπολογίσουμε τον συμμετρικό μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } t \geq 0 \\ -1, & \text{όταν } t < 0 \end{cases}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{SL}(f)(x_1, x_2, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-x_1 H(t) + x_2 H(-t) - iy)t} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(x_1 + iy)t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{-(-x_2 + iy)t} dt \\ &= \frac{1}{x_1 + iy} + \frac{1}{-x_2 + iy}, \quad \text{όταν } x_1 > 0, x_2 > 0, y \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Αν διαλέξουμε $x_1 = x_2 = x$ και $s = x + iy$ τότε

$$\mathcal{SL}(f(t))(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{\bar{s}}, \quad \text{όταν } s = x + iy, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}$$

Προφανώς, η συγκεκριμένη συνάρτηση δεν επιδέχεται κανέναν από τους μετασχηματισμούς *Fourier*, *Laplace* και δίπλευρο *Laplace*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 52 Θα υπολογίσουμε τον συμμετρικό μετασχηματισμό *Laplace* της συνάρτησης $f(t) = 1$ με $t \in \mathbb{R}$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{SL}(f)(x_1, x_2, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-x_1 H(t) + x_2 H(-t) - iy)t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(x_1 + iy)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(x_2 - iy)t} dt \\ &= \frac{1}{x_1 + iy} + \frac{1}{x_2 - iy}, \quad \text{για } x_1 > 0, x_2 > 0, y \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Διαλέγοντας $x_1 = x_2 = x$ και $s = x + iy$ έχουμε ότι

$$\mathcal{SL}(f)(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{\bar{s}}, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 53 Σε αυτό το παράδειγμα θα υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς

$$\mathcal{L}(\cos xt) \quad \text{και} \quad \mathcal{L}(\sin xt)$$

Ας υπολογίσουμε πρώτα τον μετασχηματισμό

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{ixt}) &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{ixt} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{(ix-s)t}}{ix-s} \right|_{t=0}^{t=A} \\ &= \frac{1}{s - ix}\end{aligned}$$

αρκεί $\operatorname{Re} s > 0$ για τον ίδιο λόγο με το προηγούμενο παράδειγμα.

Επειδή

$$\cos xt = \frac{e^{ixt} + e^{-ixt}}{2} \quad \text{και} \quad \sin xt = \frac{e^{ixt} - e^{-ixt}}{2}$$

προκύπτει ότι, όταν $\operatorname{Re} s > 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cos xt) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - ix} + \frac{1}{s + ix} \right) = \frac{s}{s^2 + x^2} \\ \mathcal{L}(\sin xt) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - ix} - \frac{1}{s + ix} \right) = \frac{x}{s^2 + x^2}\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 54 Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τον συμμετρικό μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} \sin xt, & \text{όταν } t \geq 0 \\ \cos xt, & \text{όταν } t < 0 \end{cases}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{SL}(f)(x_1, x_2, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-x_1 H(t) + x_2 H(-t) - iy)t} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(x_1 + iy)t} \sin xt dt + \int_{-\infty}^0 e^{(x_2 - iy)t} \cos xt dt \\ &= \frac{x}{(x_1 + iy)^2 + x^2} + \frac{x_2 - iy}{(x_2 - iy)^2 + x^2}\end{aligned}$$

αρκεί $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $y \in \mathbb{R}$. Διαλέγοντας $x_1 = x_2 = z$ και $s = z + iy$ ισχύει ότι

$$\mathcal{SL}(f)(s) = \frac{x}{s^2 + x^2} + \frac{\bar{s}}{\bar{s}^2 + x^2}, \quad \text{όταν } \operatorname{Re} s = z > 0, y \in \mathbb{R}$$

Θα υπολογίσουμε τον συμμετρικό μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} \cos xt, & \text{όταν } t \geq 0 \\ \sin xt, & \text{όταν } t < 0 \end{cases}$$

Διαλέγουμε στον μετασχηματισμό $x_1 = x_2 = z$ και $s = z + iy$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{SL}(f)(x, y) &= \mathcal{L}(\cos xt)(s) + \mathcal{L}(\sin(-xt))(\bar{s}) \\ &= \frac{s}{s^2 + x^2} - \frac{x}{\bar{s}^2 + x^2}, \quad \operatorname{Re} s = z > 0, y \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 55 Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{όταν } 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & \text{όταν } t > 1 \end{cases}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^1 t e^{-st} dt + \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A e^{-st} dt \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s^2} \end{aligned}$$

αρκεί $\operatorname{Re} s > 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 56 Θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

συγκλίνει απολύτως όταν το όριο

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A |f(t) e^{-st}| dt$$

υπάρχει. Θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

συγκλίνει ομοιόμορφα για κάποια $s \in U$ όπου U ένα υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιος αριθμός t_0 τέτοιος ώστε αν $t \geq t_0$ τότε

$$\left| \int_t^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right| < \varepsilon$$

για κάθε $s \in U$.

Για να είναι καλά ορισμένος ο μετασχηματισμός Laplace μια ικανή συνθήκη για την συνάρτηση f είναι η επόμενη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 57 Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ είναι εκθετικής τάξης a εάν υπάρχει σταθερά $M > 0$ και κάποιο $a > 0$ τέτοια ώστε για κάποιο $t_0 \geq 0$, να ισχύει

$$|f(t)| \leq Me^{at}, \quad t \geq t_0$$

Για τον συμμετρικό μετασχηματισμό Laplace μια ικανή συνθήκη για την f είναι η εξής,

ΟΡΙΣΜΟΣ 58 Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι εκθετικής τάξης a εάν υπάρχει σταθερά $M > 0$ και κάποιο $a > 0$ τέτοια ώστε

$$|f(t)| \leq Me^{a|t|}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Για να εξετάσουμε αν κάποια συνάρτηση είναι εκθετικής τάξης για κάποιο $a > 0$ αρκεί να μελετήσουμε τον λόγο

$$\frac{f(t)}{e^{at}}$$

και να δούμε αν συγκλίνει καθώς $t \rightarrow \infty$. Αν μπορούμε να διαλέξουμε κάποιο $a > 0$ τέτοιο ώστε ο λόγος αυτός να είναι φραγμένος για κάθε $t > 0$ τότε το μικρότερο από αυτά τα a (που έχει αυτή την ιδιότητα) είναι ο αριθμός που χρειαζόμαστε και η συνάρτηση f λέγεται εκθετικής τάξης a . Για παράδειγμα όλες οι συναρτήσεις $f(t) = t^p$ για οποιοδήποτε p είναι εκθετικής τάξης για οποιοδήποτε a . Η συνάρτηση e^{pt} είναι εκθετικής τάξης p ενώ η συνάρτηση e^{t^2} δεν είναι εκθετικής τάξης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 59 Αν η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, \infty)$ και εκθετικής τάξεως a , τότε ο μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}(f)$ υπάρχει για $s \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $\operatorname{Re} s = x > a$ και μάλιστα συγκλίνει απόλυτα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον η f είναι εκθετικής τάξεως a υπάρχει κάποιο $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(t)| \leq M_1 e^{at}, \quad t \geq t_0$$

για κάποιο $t_0 \geq 0$. Επίσης, επειδή η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, t_0]$ και άρα φραγμένη σε αυτό, υπάρχει $M_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(t)| \leq M_2, \quad 0 < t < t_0$$

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε ότι

$$|f(t)| \leq Me^{at}, \quad t > 0$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_0^A |f(t)e^{-st}|dt &\leq M \int_0^A e^{-(x-a)t} dt \\ &= \frac{Me^{-(x-a)A}}{-(x-a)} \Big|_0^A \\ &= \frac{M}{x-a} - \frac{Me^{-(x-a)A}}{x-a}\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας το όριο καθώς $A \rightarrow \infty$ και επειδή $\operatorname{Re} s = x > a$ έχουμε ότι

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-st}|dt \leq \frac{M}{x-a} \quad (3)$$

Δηλαδή ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει όταν $\operatorname{Re} s > a$. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 60 Η συνάρτηση $f(t) = e^{at}$ με $t \geq 0$ είναι συνεχής και εκθετικής τάξεως a . Οπότε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{at}) &= \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt \\ &= \frac{1}{s-a}\end{aligned}$$

για $\operatorname{Re} s > a$. Ο αριθμός a μπορεί να είναι και μιγαδικός οπότε σε αυτή την περίπτωση πρέπει $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 61 Η συνάρτηση $f(t) = t$ για $t \geq 0$ είναι συνεχής και εκθετικής τάξεως (για οποιοδήποτε a) επομένως

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_0^\infty te^{-st} dt \\ &= \frac{-te^{-st}}{s} \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} \mathcal{L}(1) \\ &= \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

αρκεί $\operatorname{Re} s > 0$.

Παρομοίως, μπορούμε να υπολογίσουμε ότι

$$\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3} \quad \operatorname{Re} s > 0$$

και επαγωγικά ισχύει ότι

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \operatorname{Re} s > 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 62 Έστω η συνάρτηση

$$f(t) = 2te^{t^2} \cos(e^{t^2})$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, \infty)$ αλλά δεν είναι εκθετικής τάξης. Παρόλα αυτά ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει διότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^\infty 2te^{t^2} \cos(e^{t^2}) e^{-st} dt \\ &= e^{-st} \sin(e^{t^2}) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} \sin(e^{t^2}) dt \\ &= \sin(1) + s \mathcal{L}(\sin(e^{t^2})) \end{aligned}$$

αρκεί $\operatorname{Re} s > 0$. Ο μετασχηματισμός Laplace της $\sin(e^{t^2})$ υπάρχει διότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και εκθετικής τάξεως.

2.1 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace

Στην συνέχεια θα παραθέσουμε βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace σε μορφή θεωρημάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 63 (ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ) Έστω ότι υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace για τις συναρτήσεις f_1 και f_2 για $\operatorname{Re} s > a_1$ και $\operatorname{Re} s > a_2$ αντίστοιχα. Τότε για $\operatorname{Re} s > \max\{a_1, a_2\}$ υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace του γραμμικού συνδυασμού των συναρτήσεων και μάλιστα

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L}(f_1) + c_2 \mathcal{L}(f_2)$$

για οποιεσδήποτε σταθερές c_1, c_2 .

Η απόδειξη είναι απλή χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του ολοκληρώματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 64 Έστω η συνάρτηση

$$\cosh xt = \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{2}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει και μάλιστα

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cosh xt) &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}(e^{xt}) + \mathcal{L}(e^{-xt})) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-x} + \frac{1}{s+x} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 - x^2}\end{aligned}$$

Παρομοίως

$$\mathcal{L}(\sinh xt) = \frac{x}{s^2 - x^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 65 Έστω η συνάρτηση $f(t) = a_0 + \dots + a_n t^n$. Είναι συνεχής και εκθετικής τάξης επομένως υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace. Έχουμε

$$\mathcal{L}(f)(s) = \sum_{k=0}^n a_k \mathcal{L}(t^k) = \sum_{k=0}^n \frac{k! a_k}{s^{k+1}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 66 Έστω η συνάρτηση

$$f(t) = e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}, \quad -\infty < t < \infty$$

Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace του αθροίσματος όρο προς όρο. Έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}(t^{2n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(2n)!}{s^{2n+1}} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n) \cdots (n+2)(n+1)}{s^{2n}}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2n+1)}{s^2} = \infty$$

επομένως η σειρά αυτή αποκλίνει για κάθε s .

Παρόλα αυτά ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης e^{-t^2} υπάρχει διότι είναι συνεχής και εκθετικής τάξεως.

Στο επόμενο παράδειγμα θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace μιας οικογένειας συναρτήσεων που περιέχει την e^{-t^2} .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 67 Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{t-m}{\sqrt{2}\sigma}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-sm} \int_0^\infty e^{-\left(y^2 + s\sqrt{2}\sigma y + \frac{s^2\sigma^2}{2}\right)} e^{\sigma^2 s^2/2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-sm} e^{\sigma^2 s^2/2} \int_0^\infty e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} e^{-sm} e^{\sigma^2 s^2/2} \end{aligned}$$

Εφόσον η συνάρτηση $f(t)$ είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$ μπορούμε να υπολογίσουμε τον συμμετρικό μετασχηματισμό Laplace διαλέγοντας $x_1 = x_2 = x$ και $s = x + iy$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} S\mathcal{L}(f)(s) &= \mathcal{L}(f)(s) + \mathcal{L}(f(-t))(\bar{s}) \\ &= \frac{1}{2} e^{-sm} e^{\sigma^2 s^2/2} + \int_0^\infty e^{-\bar{s}t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-(-m))^2}{2\sigma^2}} dt \\ &= \frac{1}{2} e^{-sm} e^{\sigma^2 s^2/2} + \frac{1}{2} e^{\bar{s}m} e^{\sigma^2 \bar{s}^2/2}, \quad s \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Θα δούμε στο επόμενο θεώρημα τις προϋποθέσεις για να μπορούμε να υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace μιας συνάρτησης μέσω της σειράς Taylor.

ΘΕΩΡΗΜΑ 68 Έστω

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Αν η σειρά συγκλίνει για $t \geq 0$ και

$$|a_n| \leq \frac{K b^n}{n!}$$

όπου $b > 0$ και $K > 0$ τότε

$$\mathcal{L}(f)(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{L}(t^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{αρκεί } \operatorname{Re} s > b$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον η f είναι το όριο μιας άπειρης σειράς είναι συνεχής στο $[0, \infty)$.
Επειδή

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{L}(f) - \sum_{n=0}^N a_n \mathcal{L}(t^n) \right| &= \left| \mathcal{L} \left(f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right) \right| \\ &\leq \int_0^{\infty} \left| f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right| e^{-t \operatorname{Re} s} dt \end{aligned}$$

θα αποδείξουμε ότι

$$\int_0^{\infty} \left| f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right| e^{-t \operatorname{Re} s} dt \rightarrow 0$$

καθώς $N \rightarrow \infty$.

Όμως

$$\begin{aligned} \left| f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n t^n \right| \\ &\leq K \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} \\ &= K \left(e^{bt} - \sum_{n=0}^N \frac{(bt)^n}{n!} \right) \end{aligned}$$

Οπότε

$$\int_0^{\infty} \left| f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right| e^{-t \operatorname{Re} s} dt \leq K \int_0^{\infty} \left(e^{bt} - \sum_{n=0}^N \frac{(bt)^n}{n!} \right) e^{-t \operatorname{Re} s} dt$$

Το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} e^{bt} e^{-t \operatorname{Re} s} dt = \frac{1}{\operatorname{Re} s - b} \quad \text{αρκεί } \operatorname{Re} s > b$$

ενώ το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{(bt)^n}{n!} e^{-t \operatorname{Re} s} dt = \frac{1}{\operatorname{Re} s} \left(\frac{b}{\operatorname{Re} s} \right)^n$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\frac{1}{\operatorname{Re} s} \sum_{n=0}^N \left(\frac{b}{\operatorname{Re} s} \right)^n \rightarrow \frac{1}{\operatorname{Re} s - b} \quad \text{καθώς } N \rightarrow \infty$$

προκύπτει το ζητούμενο. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 69 Έστω η συνάρτηση

$$f(t) = \frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}$$

Εδώ οι συντελεστές a_n είναι $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ και εύκολα βλέπουμε ότι

$$|a_{2n}| < \frac{1}{(2n)!}$$

Συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα, οπότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(\frac{\sin t}{t} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathcal{L}(t^{2n})}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)s^{2n+1}} \\ &= \arctan \left(\frac{1}{s} \right) \quad \text{όταν } |s| > 1 \end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 70 Έστω ότι η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, \infty)$ και εκθετικής τάξεως. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-st}| dt$$

συγκλίνει ομοιόμορφα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον υπάρχουν $M > 0$ και $a > 0$ τέτοια ώστε

$$|f(t)| \leq M e^{at}, \quad t \geq t_0$$

τότε

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right| &\leq \int_{t_0}^{\infty} |f(t)| e^{-t \operatorname{Re} s} dt \\ &\leq M \int_{t_0}^{\infty} e^{-(\operatorname{Re} s - a)t} dt \\ &= \frac{M e^{-(\operatorname{Re} s - a)t}}{-(\operatorname{Re} s - a)} \Big|_{t=t_0}^{t=\infty} \\ &= \frac{M e^{-(\operatorname{Re} s - a)t_0}}{\operatorname{Re} s - a} \quad \text{όταν } \operatorname{Re} s > a \end{aligned}$$

Αν $\operatorname{Re} s > x_0 > a$ τότε

$$\frac{M e^{-(\operatorname{Re} s - a)t_0}}{\operatorname{Re} s - a} \leq \frac{M}{x_0 - a} e^{-(x_0 - a)t_0}$$

Δεδομένου κάποιου $\varepsilon > 0$ μπορούμε να διαλέξουμε το t_0 αρκετά μεγάλο (για παράδειγμα $t_0 > T$) έτσι ώστε

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right| < \varepsilon \quad \text{όταν } t_0 > T$$

και για κάθε s τέτοιο ώστε $\operatorname{Re} s > x_0 > a$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 71 Αν η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, \infty)$ και εκθετικής τάξης a τότε

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) \rightarrow 0 \quad \text{καθώς } \operatorname{Re} s \rightarrow \infty$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Χρησιμοποιώντας την εκτίμηση 3 και λαμβάνοντας το όριο καθώς $\operatorname{Re} s = x \rightarrow \infty$ προκύπτει το ζητούμενο. □

Το αποτέλεσμα αυτό είναι αρκετά σημαντικό καθότι αν μια συνάρτηση $F(s)$ δεν συγκλίνει στο μηδέν καθώς $s \rightarrow \infty$ τότε δεν μπορεί να είναι ο μετασχηματισμός Laplace κάποιας συνάρτησης. Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $\frac{s-1}{s+1}$, $\frac{e^s}{s}$, s^2 δεν συγκλίνουν στο μηδέν καθώς το $s \rightarrow \infty$ επομένως δεν είναι ο μετασχηματισμός Laplace κάποιας συνάρτησης.

2.2 Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Λόγω του θεωρήματος 59 γνωρίζουμε ότι οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση f η οποία είναι εκθετικής τάξεως επιδέχεται μετασχηματισμό Laplace. Ας συμβολίσουμε με $C_a\mathcal{L}$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων f οι οποίες είναι εκθετικής τάξης a . Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $f \in C_a\mathcal{L}$ και $g \in C_a\mathcal{L}$ τότε και ο γραμμικός συνδυασμός τους επιδέχεται μετασχηματισμό Laplace. Άρα ο χώρος $C_a\mathcal{L}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος. Λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος εύκολα βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός

$$\mathcal{L} : C_a\mathcal{L} \rightarrow \text{im } \mathcal{L}$$

Ο πυρήνας $\ker \mathcal{L}$ αποτελείται από τις συναρτήσεις εκείνες για τις οποίες

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = 0 \quad \text{για κάθε } s \in \mathbb{C}, \quad \text{Re } s > a$$

Με άλλα λόγια, αν $s = x + iy$ τότε

$$\int_0^\infty e^{-xt} f(t) e^{-iyt} dt = 0 \quad \text{για κάθε } x > a, y \in \mathbb{R}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 28 προκύπτει ότι ο πυρήνας του μετασχηματισμού αποτελείται μονάχα από το μηδενικό στοιχείο. Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι 1-1 και συνεπώς αντιστρέψιμος. Ο αντίστροφος του είναι επίσης ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Έτσι, χρησιμοποιώντας τα παραδείγματα μετασχηματισμών Laplace και τις ιδιότητες του μετασχηματισμού είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό ορισμένων συναρτήσεων χωρίς να γνωρίζουμε την μορφή του αντιστρόφου. Θα δώσουμε (χρησιμοποιώντας το θεώρημα 32) όμως την μορφή του αντιστρόφου στην περίπτωση όπου η f είναι τμηματικά λεία και εκθετικής τάξης a .

Όσον αφορά τον συμμετρικό μετασχηματισμό Laplace, θεωρούμε το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων f οι οποίες είναι τέτοιες ώστε η συνάρτηση

$$g(t) = e^{-(x_1 H(t) + x_2 H(-t))t} f(t)$$

να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη όταν $(x_1, x_2) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ με U κατάλληλα επιλεγμένο για την συγκεκριμένη συνάρτηση. Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε με $C_U\mathcal{SL}$. Για τις συναρτήσεις αυτές ορίζεται ο συμμετρικός μετασχηματισμός Laplace. Ο συμμετρικός μετασχηματισμός Laplace

$$\mathcal{SL} : C_U\mathcal{SL} \rightarrow \text{im } \mathcal{SL}$$

είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Ο πυρήνας του μετασχηματισμού αυτού, παρόμοια όπως με τον μετασχηματισμό Laplace, αποτελείται μονάχα από το μηδενικό

στοιχείο και επομένως είναι 1-1. Ο αντίστροφος του είναι επίσης ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Αν όμως επιλέξουμε $s \in \mathbb{R}^+$ (και όχι $s \in \mathbb{C}$) στον συμμετρικό μετασχηματισμό Laplace τότε προκύπτει ότι δεν είναι αντιστρέψιμος. Για να το δούμε αυτό θα υπολογίσουμε τον συμμετρικό μετασχηματισμό Laplace (με $s \in \mathbb{R}^+$) της συνεχούς συνάρτησης $f(t) = t$ με $t \in \mathbb{R}$. Έχουμε ότι

$$\mathcal{SL}(f)(s) = \int_0^\infty te^{-st}dt + \int_{-\infty}^0 te^{st}dt, \quad s > 0$$

Έτσι λοιπόν προκύπτει ότι $\mathcal{SL}(f)(s) = 0$ και επομένως ο πυρήνας του μετασχηματισμού περιέχει τουλάχιστον μια μη μηδενική συνεχής συνάρτηση το οποίο βέβαια σημαίνει ότι σε αυτή την περίπτωση (όπου $s \in \mathbb{R}^+$) ο μετασχηματισμός δεν είναι αντιστρέψιμος.

Στα επόμενα δυο θεωρήματα δίνουμε τις μορφές των αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace, του απλού και του συμμετρικού, στην περίπτωση που η f είναι τμηματικά λεία και εκθετικής τάξης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 72 Έστω f μια τμηματικά λεία συνάρτηση ορισμένη στο $[0, +\infty)$ και εκθετικής τάξης a . Αν F είναι ο μετασχηματισμός Laplace της f τότε για $t > 0$ και $s = x + iy$ με $x > a$ ισχύει ότι

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A F(s)e^{st}dy = \frac{1}{2} (f(t+) + f(t-))$$

ενώ για $t = 0$ ισχύει ότι

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A F(s)dy = \frac{1}{2} f(0+)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε την συνάρτηση $g(t) = H(t)f(t)e^{-xt}$ όπου $H(t)$ είναι τέτοια ώστε

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } t > 0 \\ 0, & \text{όταν } t \leq 0 \end{cases}$$

Έχουμε επεκτείνει την συνάρτηση f έτσι ώστε $f(t) = 0$ όταν $t < 0$. Η συνάρτηση $g(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη όταν $x > a$ επομένως υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier για $x > a$ και μάλιστα $F(s) = \mathcal{F}(g)(s) = \mathcal{L}(f)(s)$. Λόγω του θεωρήματος 32 εφαρμοζόμενο στην g ισχύει ότι

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(x + iy)e^{iyt}dy = \frac{1}{2} (g(t+) + g(t-))$$

Όμως, για $t > 0$ ισχύει ότι $g(t+) = H(t+)f(t+)e^{-xt} = f(t+)e^{-xt}$ και $g(t-) = f(t-)e^{-xt}$, επομένως

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(x+iy)e^{iyt} dy = \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-))e^{-xt}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με το e^{xt} προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Για $t = 0$ ισχύει ότι $g(0+) = H(0+)f(0+) = f(0+)$ και $g(0-) = 0$ επομένως ισχύει η ζητούμενη σχέση. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 73 Έστω f μια τμηματικά λεία συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε η $g(t) = e^{-(x_1 H(t) + x_2 H(-t))t} f(t)$ να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ όταν $(x_1, x_2) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$. Αν $F(x_1, x_2, y)$ είναι ο συμμετρικός μετασχηματισμός Laplace της f τότε

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A F(x_1, x_2, y)e^{(x_1 H(t) - x_2 H(-t) + iy)t} dy = \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)), \quad (x_1, x_2) \in U$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα χρησιμοποιήσουμε και σε αυτή την απόδειξη τον μετασχηματισμό Fourier. Εφόσον η συνάρτηση $g(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier. Μάλιστα, ισχύει ότι $\mathcal{F}(g)(y) = \mathcal{LS}(f)(x_1, x_2, y) = F(x_1, x_2, y)$ οπότε λόγω του θεωρήματος 32 ισχύει ότι

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(x_1, x_2, y)e^{iyt} dy = \frac{1}{2}(g(t+) + g(t-))$$

Όμως, για $t > 0$ ισχύει ότι $g(t+) = f(t+)e^{-x_1 t}$ και $g(t-) = f(t-)e^{-x_1 t}$ ενώ για $t < 0$ ισχύει ότι $g(t+) = f(t+)e^{x_2 t}$ και $g(t-) = f(t-)e^{x_2 t}$. Για $t = 0$ ισχύει ότι $g(0+) = f(0+)$ και $g(0-) = f(0-)$ άρα συνολικά, μπορούμε να πούμε ότι $g(t+) = f(t+)e^{-(x_1 H(t) + x_2 H(-t))t}$ και $g(t-) = f(t-)e^{-(x_1 H(t) + x_2 H(-t))t}$ για $t \in \mathbb{R}$. Δηλαδή ισχύει ότι

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(x_1, x_2, y)e^{(x_1 H(t) - x_2 H(-t) + iy)t} dy = \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)), \quad (x_1, x_2) \in U$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 74 Όπως παρατηρούμε ο συμμετρικός μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης f , όταν διαλέξουμε $x_1 = x_2$ (δες 2), αποτελείται από το άθροισμα δυο συναρτήσεων, $g_1(s) + g_2(\bar{s})$, με $s = x + iy$. Η συνάρτηση $g_1(s)$ είναι ο μετασχηματισμός

Laplace της $f(t)$ για $t > 0$ ενώ η συνάρτηση $g_2(\bar{s})$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $f(-t)$ για $t > 0$. Επομένως, για την αντιστροφή του συμμετρικού μετασχηματισμού Laplace θα διαχωρίσουμε την μετασχηματισμένη σε άθροισμα δυο συναρτήσεων. Η πρώτη θα περιέχει όλους τους όρους που εξαρτώνται από το s και η δεύτερη από όλους τους όρους που εξαρτώνται από το $\bar{s}$. Στην συνέχεια αντιστρέφουμε κάθε μια συνάρτηση χωριστά. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης που εξαρτάται από το s θα είναι η συνάρτηση $f(t)$ για $t \geq 0$ ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης που εξαρτάται από το $\bar{s}$ θα είναι η $f(-t)$ για $t > 0$. Δηλαδή, τελικά θα ισχύει ότι

$$f(t) = \begin{cases} \mathcal{L}^{-1}(g_1(s))(t), & \text{όταν } t \geq 0 \\ \mathcal{L}^{-1}(g_2(\bar{s}))(-t), & \text{όταν } t < 0 \end{cases}$$

Πράγματι, αφού $\mathcal{L}(f(t))(s) = g_1(s)$ τότε $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(g_1(s))(t)$ για $t \geq 0$. Επίσης, αφού $\mathcal{L}(f(-t))(\bar{s}) = g_2(\bar{s})$ τότε $f(-t) = \mathcal{L}^{-1}(g_2(\bar{s}))(t)$ για $t \geq 0$. Θέτοντας, $t' = -t$ έχουμε ότι $f(t') = \mathcal{L}^{-1}(g_2(\bar{s}))(-t')$ όπου $t' < 0$. Αλλάζοντας το σύμβολο της μεταβλητής σε t έχουμε το ζητούμενο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 75 Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο συμμετρικό μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$\frac{1}{s^2} - \frac{1}{\bar{s}^2}$$

Εδώ $g_1(s) = \frac{1}{s^2}$ και $g_2(\bar{s}) = -\frac{1}{\bar{s}^2}$. Επομένως, η συνάρτηση $f(t)$ είναι τέτοια ώστε

$$f(t) = \begin{cases} \mathcal{L}^{-1}(g_1(s))(t), & \text{όταν } t \geq 0 \\ \mathcal{L}^{-1}(g_2(\bar{s}))(-t), & \text{όταν } t < 0 \end{cases}$$

Όμως, $\mathcal{L}^{-1}(g_1(s))(t) = t$ και $\mathcal{L}^{-1}(g_2(\bar{s}))(-t) = t$ συνεπώς $f(t) = t$ με $t \in \mathbb{R}$.

Στην συνέχεια θα επικεντρωθούμε στην μελέτη του (απλού) μετασχηματισμού Laplace μιας και ο συμμετρικός αποτελείται από το άθροισμα δυο απλών μετασχηματισμών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 76 Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$\frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s+1)}$$

Χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του αντιστρόφου προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s+1)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2(s-1)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2(s+1)}\right) \\ &= \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \\ &= \cosh t, \quad t \geq 0\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 77 Ας δούμε την συνάρτηση

$$u_a(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } t \geq a \\ 0, & \text{όταν } t < a \end{cases}$$

η οποία είναι γνωστή και ως συνάρτηση του *Heaviside*. Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace και έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u_a)(s) &= \int_0^\infty u_a(t)e^{-st}dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st}dt \\ &= \frac{e^{-sa}}{s} \quad \text{όταν } \operatorname{Re} s > 0\end{aligned}$$

Αν υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$v_a(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } t > a \\ 0, & \text{όταν } t \leq a \end{cases}$$

η οποία διαφέρει σε ένα σημείο από την u_a , θα βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα. Αυτό συμβαίνει διότι οι συναρτήσεις u_a και v_a δεν είναι συνεχείς για αυτό και δεν ορίζεται καλά ο αντιστροφος σε αυτή την περίπτωση.

Παρόμοια η συνάρτηση

$$u_{ab}(t) = \frac{1}{b-a} (u_a(t) - u_b(t)) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } t < a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{όταν } a \leq t < b \\ 0, & \text{όταν } t \geq b \end{cases}$$

έχει ως μετασχηματισμό Laplace την

$$\mathcal{L}(u_{ab})(s) = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s(b-a)}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 78 Αν $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ για $\operatorname{Re} s > 0$ τότε

$$F(s-a) = \mathcal{L}(e^{at}f(t)), \quad a \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re} s > a$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όταν $\operatorname{Re} s > a$ τότε

$$\begin{aligned} F(s-a) &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t) dt \\ &= \mathcal{L}(e^{at}f(t)) \end{aligned}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 79 Έχουμε αποδείξει ότι

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2} \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Οπότε

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(s-a)^2} \quad \operatorname{Re} s > a$$

και γενικότερα

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \operatorname{Re} s > a$$

Εφόσον η συνάρτηση $t^n e^{at}$ είναι συνεχής τότε προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(s-a)^{n+1}} \right) = \frac{1}{n!} t^n e^{at}, \quad t \geq 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 80 Δεδομένου ότι

$$\mathcal{L}(\sin xt) = \frac{x}{s^2 + x^2}$$

τότε

$$\mathcal{L}(e^{2t} \sin 3t) = \frac{3}{(s-2)^2 + 9}$$

Επίσης, ισχύουν τα παρακάτω όταν $\operatorname{Re} s > a$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{at} \cos xt) &= \frac{s-a}{(s-a)^2 + x^2} \\ \mathcal{L}(e^{at} \sin xt) &= \frac{x}{(s-a)^2 + x^2} \\ \mathcal{L}(e^{at} \cosh xt) &= \frac{s-a}{(s-a)^2 - x^2} \\ \mathcal{L}(e^{at} \sinh xt) &= \frac{x}{(s-a)^2 - x^2}\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 81 Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης

$$\frac{s}{s^2 + 4s + 1}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 4s + 1}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s+2)^2 - 3}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2 - 3}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+2)^2 - 3}\right) \\ &= e^{-2t} \cosh(\sqrt{3}t) - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-2t} \sinh(\sqrt{3}t)\end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 82 Αν $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ τότε

$$\mathcal{L}(u_a(t)f(t-a)) = e^{-as}F(s), \quad a \geq 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή

$$\int_0^\infty e^{-st} (u_a(t)f(t-a)) dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt$$

Θέτουμε $y = t - a$ οπότε το δεξί μέλος γίνεται

$$\int_0^\infty e^{-s(y+a)} f(y) dy = e^{-as} \int_0^\infty e^{-st} f(y) dy = e^{-as} F(s)$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 83 Έστω η συνάρτηση

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } 0 \leq t < 1 \\ (t-1)^2, & \text{όταν } t \geq 1 \end{cases}$$

Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(g)(s) &= \mathcal{L}(u_1(t)(t-1)^2) \\ &= e^{-s} \mathcal{L}(t^2) \\ &= \frac{2e^{-s}}{s^3}, \quad \operatorname{Re} s > 0 \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 84 Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$\frac{e^{-2s}}{s^2 + 1}$$

Επειδή

$$\frac{e^{-2s}}{s^2 + 1} = e^{-2s} \mathcal{L}(\sin t)$$

τότε

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2 + 1}\right) = u_2(t) \sin(t-2), \quad t \geq 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 85 Αν η f είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξεως a τότε για τον μετασχηματισμό Laplace ισχύει ότι

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = \mathcal{L}((-1)^n t^n f(t)), \quad n = 1, 2, \dots \quad \operatorname{Re} s > a$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση όπου $s \in \mathbb{R}$. Για την γενικότερη περίπτωση μπορεί κανείς να δει το βιβλίο [27].

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F(s) &= \frac{d}{ds} \left(\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right) \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty -te^{-st} f(t) dt \\ &= \mathcal{L}(-tf(t)) \end{aligned}$$

έχοντας χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι μπορούμε να περάσουμε την παράγωγο μέσα στο ολοκλήρωμα (δες [27], Θεώρημα Α.12). Επαγωγικά προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 86 Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t \cos xt) &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}(\cos xt) \\ &= -\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + x^2} \\ &= \frac{s^2 - x^2}{(s^2 + x^2)^2}\end{aligned}$$

και παρομοίως

$$\mathcal{L}(t \sin xt) = \frac{2xs}{(s^2 + x^2)^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 87 Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης

$$\ln \frac{s+a}{s+b}$$

Εφόσον

$$\frac{d}{ds} \ln \frac{s+a}{s+b} = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}$$

τότε

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\ln \frac{s+a}{s+b} \right) \\ &= -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(e^{-bt} - e^{-at} \right)\end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 88 Αν η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, \infty)$, εκθετικής τάξης a και τέτοια ώστε το $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ να υπάρχει, τότε

$$\int_s^\infty F(x) dx = \mathcal{L} \left(\frac{f(t)}{t} \right), \quad s > a$$

όπου $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

ολοκληρώνουμε κατά μέλη και έχουμε

$$\int_s^\infty F(x) dx = \lim_{w \rightarrow \infty} \int_s^w \left(\int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt \right) dx$$

Λόγω του ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt$ συγκλίνει ομοιόμορφα μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά ολοκλήρωσης και να πάρουμε

$$\begin{aligned} \int_s^\infty F(x) dx &= \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(\int_s^w e^{-xt} f(t) dx \right) dt \\ &= \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-xt}}{-t} f(t) \right]_s^w dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt - \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-wt} \frac{f(t)}{t} dt \\ &= \mathcal{L} \left(\frac{f(t)}{t} \right) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-wt} \frac{f(t)}{t} dt = 0$ (δες 71). □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 89 Είχαμε υπολογίσει τον μετασχηματισμό Laplace της $\frac{\sin t}{t}$ και επομένως έχουμε ότι

$$\mathcal{L} \left(\frac{\sin t}{t} \right) = \int_s^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2} - \arctan s \quad s > 0$$

Παρόμοια έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(\frac{\sinh xt}{t} \right) &= \int_s^\infty \frac{xdy}{y^2 - x^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_s^\infty \left(\frac{1}{y-x} - \frac{1}{y+x} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{s+x}{s-x} \quad \text{για } s > |x| \end{aligned}$$

2.3 Η συνάρτηση Γάμμα

Έχουμε αποδείξει ότι

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Θα γενικεύσουμε το αποτέλεσμα αυτό για μη ακέραιες δυνάμεις, οπότε θα υπολογίσουμε το

$$\mathcal{L}(t^a)(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^a dt \quad a > -1$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = st$ όπου $s > 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^a)(s) &= \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^a \frac{1}{s} dx \\ &= \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty x^a e^{-x} dx \end{aligned}$$

Η συνάρτηση

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \quad p > 0$$

ονομάζεται συνάρτηση Γάμμα. Με αυτό τον συμβολισμό έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(t^a)(s) = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \quad a > -1, \quad s > 0$$

Επομένως όταν $a = n = 1, 2, \dots$ ισχύει ότι

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Μπορεί να ορισθεί ακόμη και για μιγαδικό εκθέτη a αρκεί $a \neq 0, -1, -2, \dots$ και ισχύει ότι

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \quad a \neq 0, -1, -2, \dots$$

Πράγματι, όταν $a = n \in \mathbb{N}$ μπορεί εύκολα να αποδείξουμε την σχέση αφού

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty x^n (-e^{-x})' dx \\ &= [e^{-x} x^n]_0^\infty + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= n\Gamma(n) \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 90 Για $a = -\frac{1}{2}$ έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}$$

Για να υπολογίσουμε το $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $x = u^2$ και έχουμε

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

Συνεπώς

$$\mathcal{L}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s > 0$$

οπότε και

$$\mathcal{L}^{-1}\left(s^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}, \quad t > 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 91 Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό

$$\mathcal{L}(\ln t)(s) = \int_0^\infty e^{-st} \ln t dt$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = st$ όπου $s > 0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\ln t)(s) &= \int_0^\infty e^{-x} \ln\left(\frac{x}{s}\right) \frac{1}{s} dx \\ &= \frac{1}{s} \left(\int_0^\infty e^{-x} \ln x dx - \ln s \int_0^\infty e^{-x} dx \right) \\ &= -\frac{1}{s} (\ln s + \gamma) \end{aligned}$$

όπου $\gamma = -\int_0^\infty e^{-x} \ln x dx = 0.577 \dots$ και ονομάζεται η σταθερά του *Euler* την οποία είχαμε ξαναδεί ως την διαφορά $\sum \frac{1}{n} - \ln n$ (δες περισσότερα για την σταθερά *Euler* στο [17]).

2.4 Μετασχηματισμός Laplace Περιοδικών Συναρτήσεων

Έστω f μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο T . Ορίζουμε την συνάρτηση

$$F_1(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 92 Αν $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ και f είναι περιοδική με περίοδο T , τότε

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} F_1(s)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε ότι

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $x = t - T$ στο τελευταίο ολοκλήρωμα και έχουμε

$$\begin{aligned} \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt &= \int_0^\infty e^{-s(x+T)} f(x+T) dx \\ &= e^{-sT} \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \\ &= e^{-sT} F(s) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας και λύνοντας ως προς $F(s)$ έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 93 Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} \sin xt, & \text{όταν } \frac{2n\pi}{x} < t < \frac{(2n+1)\pi}{x} \\ 0, & \text{όταν } \frac{(2n+1)\pi}{x} < t < \frac{(2n+2)\pi}{x} \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι φραγμένη, τμηματικά συνεχής και περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{x}$. Επομένως

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi s}{x}}} F_1(s)$$

όπου

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \int_0^{\frac{\pi}{x}} e^{-st} \sin xt dt \\ &= \frac{e^{-st}}{s^2 + x^2} [-s \sin xt - x \cos xt]_0^{\frac{\pi}{x}} \\ &= \frac{x}{s^2 + x^2} (1 + e^{-\frac{\pi s}{x}}) \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{x}{(s^2 + x^2)(1 - e^{-\frac{\pi s}{x}})}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 94 Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της $f(t) = |\sin xt|$ η οποία είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{\pi}{x}$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(s) &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi s}{x}}} F_1(s) \\ &= \frac{x}{s^2 + x^2} \left(\frac{1 + e^{-\frac{\pi s}{x}}}{1 - e^{-\frac{\pi s}{x}}} \right)\end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 95 Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $(0, \infty)$ και εκθετικής τάξης a και επίσης η f' είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, \infty)$. Τότε

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0+) \quad \text{όταν } \operatorname{Re} s > a$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f')(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_\delta^x e^{-st} f'(t) dt \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[e^{-st} f(t) \Big|_\delta^x + s \int_\delta^x e^{-st} f(t) dt \right] \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[e^{-sx} f(x) - e^{-s\delta} f(\delta) + s \int_\delta^x e^{-st} f(t) dt \right] \\ &= -f(0+) + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad \text{όταν } \operatorname{Re} s > a\end{aligned}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 96 Θα υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς

$$f(t) = \mathcal{L}(\sin^2 xt) \quad \text{και} \quad g(t) = \mathcal{L}(\cos^2 xt)$$

μέσω των παραγώγων τους. Η παράγωγος της f είναι η $f'(t) = 2x \sin xt \cos xt = x \sin 2xt$. Επειδή

$$\mathcal{L}(x \sin 2xt) = s\mathcal{L}(\sin^2 xt) - \sin^2 0$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin^2 xt) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}(x \sin 2xt) \\ &= \frac{x}{s} \frac{2x}{s^2 + x^2} \\ &= \frac{2x^2}{s(s^2 + x^2)}\end{aligned}$$

Παρομοίως,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cos^2 xt) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}(-x \sin 2xt) + \frac{1}{s} \\ &= -\frac{x}{s} \frac{2x}{s^2 + 4x^2} + \frac{1}{s} \\ &= \frac{s^2 + 2x^2}{s(s^2 + 4x^2)}\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 97 Αν για μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει ότι $f(0) = 0$ τότε ισχύει και ότι

$$f'(t) = \mathcal{L}^{-1}(sF(s))$$

όπου $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$.

Οπότε, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 - a^2}\right) = \left(\frac{\sinh at}{a}\right)' = \cosh at$$

Γενικότερα, ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 98 Έστω ότι οι $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ είναι συνεχείς στο $(0, \infty)$ και εκθετικής τάξεως ενώ η $f^{(n)}$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, \infty)$. Τότε

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}f'(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+)$$

Το αντίστοιχο αποτέλεσμα για τον συμμετρικό μετασχηματισμό Laplace είναι το επόμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 99 Έστω ότι οι $f, f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και η f είναι εκθετικής τάξης a (δες ορισμό 58). Τότε

$$s\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - \bar{s}\mathcal{L}(f(-t))(\bar{s})$$

όπου $s = x + iy$ και $\operatorname{Re} s = x > a, y \in \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε ότι

$$S\mathcal{L}(f')(s) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt + \int_{-\infty}^0 f'(t)e^{\bar{s}t}dt$$

Όμως

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 f'(t)e^{\bar{s}t}dt &= [f(t)e^{\bar{s}t}]_{-\infty}^0 - \bar{s} \int_{-\infty}^0 f(t)e^{\bar{s}t}dt \\ &= f(0-) - \bar{s}\mathcal{L}(f(-t))(\bar{s}) \end{aligned}$$

και παρόμοια

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt &= [f(t)e^{-st}]_0^\infty + s \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ &= -f(0+) + s\mathcal{L}(f(t))(s) \end{aligned}$$

Λόγω συνέχειας της f προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. $\square$

Παρόμοια, έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 100 Έστω ότι οι f, f', f'' είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και οι f, f' είναι εκθετικής τάξης a . Τότε

$$S\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f(t))(s) + \bar{s}^2\mathcal{L}(f(-t))(\bar{s}) - f(0)(s + \bar{s})$$

όπου $s = x + iy$ και $x > a, y \in \mathbb{R}$.

Γενικότερα, χρησιμοποιώντας επαγωγή, ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 101 Έστω ότι οι $f, f', \dots, f^{(n)}$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, εκτός ίσως από το μηδέν, ενώ οι $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ είναι εκθετικής τάξης a . Τότε

$$\begin{aligned} &S\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) \\ &= \mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)(s) + \mathcal{L}\left(f^{(n)}(-t)\right)(\bar{s}) \\ &= \underbrace{s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}f'(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+)}_{\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s)} \\ &\quad + \underbrace{(-\bar{s})^n\mathcal{L}(f(-t))(\bar{s}) + (-\bar{s})^{n-1}f(0-) + (-\bar{s})^{n-2}f'(0-) + \dots + f^{(n-1)}(0-)}_{\mathcal{L}(f^{(n)}(-t))(\bar{s})} \end{aligned}$$

Διαλέγοντας στον συμμετρικό μετασχηματισμό Laplace $x_1 = x_2 = 0$, παρατηρούμε ότι συμπίπτει με τον μετασχηματισμό Fourier όπως επίσης και οι αντίστοιχες ιδιότητες. Έτσι λοιπόν, οι δυο μεταβλητές x_1, x_2 μας δίνουν ακόμη δυο βαθμούς ελευθερίας σε σχέση με τον μετασχηματισμό Fourier ούτως ώστε να επιλεγούν κατάλληλα για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Αν η συνάρτηση f είναι μηδέν για $t < 0$ και διαλέξουμε $x_2 = 0$ τότε ο συμμετρικός μετασχηματισμός Laplace συμπίπτει με τον απλό μετασχηματισμό Laplace. Τελικά, προκύπτει ότι ο συμμετρικός μετασχηματισμός Laplace αποτελεί μια φυσιολογική επέκταση των μετασχηματισμών Fourier και Laplace.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 102 Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace των πολυωνύμων *Laguerre*

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

Θέτουμε $y(t) = t^n e^{-t}$ και υπολογίζουμε πρώτα τον μετασχηματισμό

$$\mathcal{L}(y^{(n)}) = s^n \mathcal{L}(y) = \frac{s^n n!}{(s+1)^{n+1}}$$

Επομένως έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(L_n) = \mathcal{L} \left(e^t \frac{1}{n!} y^{(n)} \right) = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > 1$$

Τέλος, με το επόμενο θεώρημα θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 103 Έστω ότι η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, \infty)$ και εκθετικής τάξεως a . Αν

$$g(t) = \int_0^t f(u) du$$

τότε

$$\mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f), \quad \operatorname{Re} s > a$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον $g'(t) = f(t)$ εκτός από τα σημεία ασυνέχειας της f τότε με ολοκλήρωση κατά παράγοντες ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(g)(s) &= \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{g(t) e^{-st}}{-s} \Big|_0^A + \frac{1}{s} \int_0^A e^{-st} f(t) dt \right] \end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{g(A)e^{-sA}}{-s}$$

Επειδή

$$\begin{aligned} |g(A)e^{-sA}| &\leq e^{-A \operatorname{Re} s} \int_0^A |f(u)| du \\ &\leq M e^{-A \operatorname{Re} s} \int_0^A e^{au} du \\ &= \frac{M}{a} \left(e^{-(\operatorname{Re} s - a)A} - e^{-A \operatorname{Re} s} \right) \\ &\rightarrow 0 \text{ καθώς } A \rightarrow \infty \text{ για } \operatorname{Re} s > a > 0 \end{aligned}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και όταν $a = 0$. Επομένως

$$\mathcal{L}(g) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f), \quad \text{για } \operatorname{Re} s > a$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 104 Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$\int_0^t \frac{\sin u}{u} du$$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι

$$\mathcal{L} \left(\int_0^t \frac{\sin u}{u} du \right) = \frac{1}{s} \mathcal{L} \left(\frac{\sin t}{t} \right) = \frac{1}{s} \arctan \frac{1}{s}$$

Στα επόμενα δυο θεωρήματα θα μελετήσουμε την συμπεριφορά μιας συνάρτησης f στο μηδέν και το $+\infty$ μέσω του μετασχηματισμού της.

ΘΕΩΡΗΜΑ 105 Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $(0, \infty)$ και εκθετικής τάξης a και επίσης η f' είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, \infty)$. Τότε ισχύει ότι

$$f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s), \quad s \in \mathbb{R}$$

όπου $F(s) = \mathcal{L}(f)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ξεκινώντας από τον μετασχηματισμό Laplace της παραγώγου έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(f') = sF(s) - f(0+), \quad s > a$$

Επειδή κάθε μετασχηματισμένη συνάρτηση συγκλίνει στο μηδέν καθώς $s \rightarrow \infty$ τότε εύκολα προκύπτει ότι

$$sF(s) - f(0+) \rightarrow 0 \quad \text{καθώς } s \rightarrow \infty$$

και άρα και η ζητούμενη σχέση. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 106 Έστω

$$\mathcal{L}(f) = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}$$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα (υποθέτοντας ότι ικανοποιεί η συνάρτηση f τις απαιτούμενες συνθήκες) έχουμε ότι

$$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left(\frac{s+1}{(s-1)(s+2)} \right) = 1$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 107 Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $(0, \infty)$ και εκθετικής τάξης a και επίσης η f' είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, \infty)$. Ας υποθέσουμε ακόμη ότι το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ υπάρχει. Τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s), \quad s \in \mathbb{R}$$

όπου $F(s) = \mathcal{L}(f)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Λόγω της ύπαρξης του ορίου για την f προκύπτει ότι είναι εκθετικής τάξεως $a = 0$. Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace στην παράγωγο της συνάρτησης f έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(f') = sF(s) - f(0+)$$

Από την άλλη μεριά όμως

$$\mathcal{L}(f') = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt$$

και επομένως

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}(f') = \int_0^\infty f'(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} f(A) - f(0+)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 108 Έστω $f(t) = \sin t$. Τότε

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 + 1} = 0$$

Δεν μπορούμε όμως να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι το ίδιο όριο έχει και η f καθώς $t \rightarrow \infty$ διότι στην προκειμένη περίπτωση δεν έχει καν όριο. Αν όμως είχε κάποιο όριο, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα θα όφειλε να είναι ίσο με το $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$.

2.4.1 Συνέλιξη

Στην συνέχεια θα αναφερθούμε στην συνέλιξη δυο συναρτήσεων την οποία ορίζουμε για την προκειμένη περίπτωση (αφού υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις ορίζονται στο $[0, +\infty)$) να είναι ως εξής

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

Με τον μετασχηματισμό $u = t - x$ είναι καθαρό ότι $f * g = g * f$. Εύκολα αποδεικνύονται και οι παρακάτω τρεις ιδιότητες,

$$(i) \quad c(f * g) = cf * g = f * cg$$

$$(ii) \quad f * (g * h) = (f * g) * h$$

$$(iii) \quad f * (g + h) = f * g + f * h$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 109 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΗΝΕΛΙΞΗΣ) Αν οι f και g είναι τμηματικά συνεχείς στο $[0, \infty)$ και εκθετικής τάξεως a , τότε

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s), \quad \text{για } \operatorname{Re} s > a$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s) &= \left(\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right) \cdot \left(\int_0^\infty e^{-su} g(u) du \right) \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(t+u)} f(t) g(u) du \right) dt \end{aligned}$$

τότε με την αντικατάσταση $x = t + u$ έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-sx} f(t) g(x-t) dx \right) dt$$

Θέτοντας $g(t) = 0$ για $t < 0$ τότε $g(x-t) = 0$ όταν $x < t$ επομένως

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx} f(t) g(x-t) dx dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx} f(t) g(x-t) dt dx \\ &= \int_0^\infty e^{-sx} \left(\int_0^\infty f(t) g(x-t) dt \right) dx \\ &= \mathcal{L}(f * g)(s)\end{aligned}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 110 Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\mathcal{L}(e^{at} * e^{bt}) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right) &= e^{at} * e^{bt} \\ &= \int_0^\infty e^{ax} e^{b(t-x)} dx \\ &= \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}, \quad a \neq b\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 111 Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης

$$\frac{1}{s^2(s-1)}$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνέλιξης. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\mathcal{L}(t * e^t) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-1}$$

συνεπώς ο αντίστροφος είναι η συνάρτηση $t * e^t = e^t - t - 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 112 Γνωρίζουμε ότι

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης

$$\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} * e^t \\ &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{t-x} dx \\ &= \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx\end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $u = \sqrt{x}$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right) &= \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du \\ &= e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t})\end{aligned}$$

Τελικά, έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\left(\operatorname{erf}(\sqrt{t})\right)(s) = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

2.4.2 Η ΣΤΗΝΑΡΤΗΣΗ ΒΗΤΑ

Έστω οι συναρτήσεις $f(t) = t^{a-1}$ και $g(t) = t^{b-1}$ όπου $a, b > 0$. Τότε

$$(f * g)(t) = \int_0^t x^{a-1} (t-x)^{b-1} dx$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $x = ut$ προκύπτει ότι

$$(f * g)(t) = t^{a+b-1} \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du$$

Η συνάρτηση

$$B(a, b) = \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du$$

ονομάζεται **ΣΤΥΝΑΡΤΗΣΗ ΒΗΤΑ**. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της συνέλιξης έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(t^{a+b-1}B(a,b)\right) &= \mathcal{L}(t^{a-1})\mathcal{L}(t^{b-1}) \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{s^{a+b}}\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}t^{a+b-1}B(a,b) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{s^{a+b}}\right) \\ &= \Gamma(a)\Gamma(b)\frac{t^{a+b-1}}{\Gamma(a+b)}\end{aligned}$$

και άρα προκύπτει η φόρμουλα

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Στον πίνακα 2 συγκεντρώνουμε ορισμένους από τους μετασχηματισμούς Laplace που έχουμε υπολογίσει στα παραδείγματα. Για περισσότερους μετασχηματισμούς και πληρέστερους πίνακες μπορεί κανείς να συμβουλευθεί την προτεινόμενη βιβλιογραφία.

2.5 Εφαρμογές του Μετασχηματισμού Laplace

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 113 Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}y''(t) + y(t) &= 1 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι η λύση ικανοποιεί όλες τις απαιτούμενες προϋποθέσεις ούτως ώστε να μπορούμε να μετασχηματίσουμε την παραπάνω εξίσωση κατά Laplace. Έτσι έχουμε

$$\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1)$$

οπότε λύνοντας ως προς $Y(s)$ προκύπτει ότι

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}$$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό του δεξιού μέλους έχουμε ότι

$$y(t) = 1 - \cos t$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι πράγματι είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{st}dy, \ s = x + iy, \ t \geq 0$	$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt, \ s \in \mathbb{C}$
$f(t) = 1$	$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s}, \ \text{Re } s > 0$
$f(t) = e^{ixt}$	$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s-ix}, \ \text{Re } s > 0$
$f(t) = \cos xt$	$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s}{s^2+x^2}, \ \text{Re } s > 0$
$f(t) = \sin xt$	$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{x}{s^2+x^2}$
$f(t) = e^{at}, \ a \in \mathbb{C}$	$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s-a}, \ \text{Re } s > \text{Re } a$
$f(t) = t^n$	$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \ \text{Re } s > 0$

Πίνακας 2: Πίνακας μετασχηματισμών Laplace

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 114 Θα επιλύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}y''' + y'' &= e^t + t + 1 \\y(0) &= 0 \\y'(0) &= 0 \\y''(0) &= 0\end{aligned}$$

Μετασχηματίζουμε κατά μέλη την παραπάνω εξίσωση και έχουμε

$$s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) + s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$

Λύνοντας ως προς $Y(s)$ έχουμε

$$Y(s) = \frac{2s^2 - 1}{s^4(s+1)(s-1)} = -\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s-1)}$$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό του δεξιού μέλους έχουμε

$$y(t) = -t + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$$

Στην συνέχεια επιβεβαιώνουμε ότι είναι πράγματι λύση του παραπάνω προβλήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 115 Θα υπολογίσουμε την λύση του παρακάτω προβλήματος συνοριακών τιμών,

$$\begin{aligned}y'' + \lambda^2 y &= \cos \lambda t \\y(0) &= 1 \\y\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right) &= 1\end{aligned}$$

Μετασχηματίζοντας κατά μέλη την παραπάνω εξίσωση κατά Laplace λαμβάνουμε την ισότητα

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2 + \lambda^2)^2} + \frac{sy(0)}{s^2 + \lambda^2} + \frac{y'(0)}{s^2 + \lambda^2}$$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό του δεξιού μέλους έχουμε ότι

$$y(t) = \frac{1}{2\lambda}t \sin \lambda t + \cos \lambda t + \frac{y'(0)}{\lambda} \sin \lambda t$$

Για να υπολογίσουμε το $y'(0)$ θέτουμε στην τελευταία ισότητα $t = 0$ και έτσι έχουμε ότι $y'(0) = \lambda - \frac{\pi}{4\lambda}$. Τέλος, επιβεβαιώνουμε ότι είναι λύση του προβλήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 116 Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}y' &= -z \\z' &= y \\y(0) &= 1 \\z(0) &= 0\end{aligned}$$

Μετασχηματίζουμε κατά Laplace τις διαφορικές εξισώσεις και έχουμε

$$\begin{aligned}sY(s) - 1 &= -Z(s) \\sZ(s) &= Y(s)\end{aligned}$$

το οποίο είναι ένα αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων. Λύνοντας το σύστημα αυτό έχουμε ότι

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

άρα $y(t) = \cos t$. Επομένως, $z(t) = -y'(t) = \sin t$ και εύκολα βλέπουμε ότι είναι λύση του συστήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 117 Παρόμοια, θα υπολογίσουμε την λύση του συστήματος

$$\begin{aligned}y' + z' + y + z &= 1, \\y' + z &= e^t, \\y(0) &= -1 \\z(0) &= 2\end{aligned}$$

Μετασχηματίζουμε κατά Laplace τις δυο διαφορικές εξισώσεις και λύνοντας το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει έχουμε ότι

$$Y(s) = \frac{-s^2 + s + 1}{s(s-1)^2}$$

Τελικά, η λύση του συστήματος είναι $y(t) = 1 - 2e^t + te^t$ και $z(t) = 2e^t - te^t$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 118 Θα επιλύσουμε την συνήθη διαφορική εξίσωση

$$y'' + ty' - 2y = 4, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$$

χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace. Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό κατά μέλη έχουμε

$$s^2 Y(s) + s - (sY'(s) + Y(s)) - 2Y(s) = \frac{4}{s}$$

και επομένως προκύπτει μια συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως ως προς την $Y(s)$ της οποίας η λύση είναι

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{C}{s^3} e^{s^2/2}$$

Αφού ισχύει ότι $Y(s) \rightarrow 0$ καθώς $s \rightarrow \infty$ τότε αναγκαστικά $C = 0$ και επομένως $y(t) = t^2 - 1$ η οποία πράγματι είναι λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 119 Θα επιλύσουμε μια ολοκληρωτική εξίσωση εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace. Η εξίσωση είναι

$$f(t) = e^{-t} + \int_0^t \sin(t-x)f(x)dx$$

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό κατά μέλη και έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(e^{-t}) + \mathcal{L}(\sin t)\mathcal{L}(f)(s)$$

έχοντας εφαρμόσει το θεώρημα της συνέλιξης. Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \frac{\mathcal{L}(e^{-t})}{1 - \mathcal{L}(\sin t)} \\ &= \frac{s^2 + 1}{s^2(s+1)} \\ &= \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Επομένως η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης είναι η συνάρτηση $f(t) = 2e^{-t} + t - 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 120 Θα επιλύσουμε την εξίσωση

$$y(t) - y\left(t - \frac{\pi}{x}\right) = \sin xt, \quad y(0) = 0, \quad t \leq 0$$

χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace. Έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\left(y\left(t - \frac{\pi}{x}\right)\right) = e^{-\frac{s\pi}{x}} \mathcal{L}(y)$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace στην αρχική εξίσωση προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}(y) = \frac{x}{(s^2 + x^2)(1 - e^{-\frac{s\pi}{x}})}$$

και τελικά

$$y(t) = \begin{cases} \sin xt, & \text{για } \frac{2n\pi}{x} < t < \frac{(2n+1)\pi}{x} \\ 0, & \text{για } \frac{(2n+1)\pi}{x} < t < \frac{(2n+2)\pi}{x} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 121 Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t) = a^{[t]}$ όπου $[t]$ είναι το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού t και $a > 0$. Εφόσον, $a^{[t]}$ είναι εκθετικής τάξης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^1 a^0 e^{-st} dt + \int_1^2 a^1 e^{-st} dt + \dots \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s} + \frac{a(e^{-s} - e^{-2s})}{s} + \dots \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - ae^{-s})}, \quad \operatorname{Re} s > \max\{0, \ln a\} \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 122 Θα επιλύσουμε την επόμενη εξίσωση διαφορών

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

Ορίζουμε μια συνάρτηση $y(t)$ τέτοια ώστε

$$y(t) = a_n, \quad n \leq t \leq n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Επομένως, η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$y(t+2) - 3y(t+1) + 2y(t) = 0, \quad t \geq 0$$

Λαμβάνοντας τον μετασχηματισμό Laplace της $y(t+2)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y(t+2)) &= \int_0^\infty y(t+2)e^{-st} dt \\ &= \int_2^\infty e^{-s(x-2)} y(x) dx \\ &= e^{2s} \int_0^\infty y(x)e^{-sx} dx - e^{2s} \int_0^2 y(x)e^{-sx} dx \\ &= e^{2s} Y(s) - \frac{e^s}{s} (1 - e^{-s}) \end{aligned}$$

Παρόμοια, ισχύει ότι

$$\mathcal{L}(y(t+1)) = e^s Y(s)$$

Λαμβάνοντας τον μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης διαφορών κατά μέλη έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(y(t)) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - 2e^{-s})} - \frac{1}{s} = \mathcal{L}(2^{[t]}) - \mathcal{L}(1)$$

Επομένως, $y(t) = 2^{[t]} - 1$ και αυτό σημαίνει ότι $a_n = 2^n - 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 123 Θα υπολογίσουμε την λύση του παρακάτω παραβολικού προβλήματος

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= u_t(x, t), & x > 0, & \quad t > 0 \\ u(x, 0+) &= 1, & x > 0 \\ u(0, t) &= 0, & t > 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) &= 1 \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Laplace κατά μέλη, ως προς την μεταβλητή t και προκύπτει η συνήθης διαφορική εξίσωση

$$U_{xx}(x, s) = sU(x, s) - u(x, 0+) = sU(x, s) - 1$$

Επίσης, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Laplace στην συνθήκη $u(0, t) = 0$ και έχουμε ότι $U(0, s) = 0$. Τέλος, το ίδιο κάνουμε και στην τελευταία συνθήκη, δηλαδή

$$\mathcal{L}(\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t)) = \frac{1}{s} = \lim_{x \rightarrow \infty} U(x, s)$$

Η λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης με άγνωστη την $U(x, s)$ είναι

$$U(x, s) = c_1(s)e^{x\sqrt{s}} + c_2(s)e^{-x\sqrt{s}} + \frac{1}{s}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $U(0, s) = 0$ και $\frac{1}{s} = \lim_{x \rightarrow \infty} U(x, s)$ καταλήγουμε στην

$$U(x, s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{x\sqrt{s}}}{s}$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό (χρησιμοποιώντας πίνακες μετασχηματισμών) έχουμε ότι

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-u^2} du$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 124 Θα επιλύσουμε την επόμενη υπερβολική μερική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} y_{tt}(x, t) &= a^2 y_{xx}(x, t), & x > 0, & t > 0, & a > 0 \\ y(x, 0+) &= 0, & x > 0 \\ y_t(x, 0+) &= 0, & x > 0 \\ y(0, t) &= f(t), & t > 0, & f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} y(x, t) &= 0 \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Laplace ως προς την μεταβλητή t και έχουμε

$$s^2 Y(x, s) - sy(x, 0+) - y_t(x, 0+) = a^2 Y_{xx}(x, s)$$

οπότε

$$Y_{xx}(x, s) - \frac{s^2}{a^2} Y(x, s) = 0$$

Η λύση αυτής της συνήθους διαφορικής εξίσωσης είναι

$$Y(x, s) = c_1(s)e^{\frac{sx}{a}} + c_2(s)e^{-\frac{sx}{a}}$$

Επειδή $y(x, t) \rightarrow 0$ καθώς $x \rightarrow \infty$ και $Y(0, s) = F(s)$ έχουμε τελικά

$$Y(x, s) = F(s)e^{-\frac{sx}{a}}$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό προκύπτει ότι

$$y(x, t) = \begin{cases} f(t - \frac{x}{a}), & \text{όταν } t \geq \frac{x}{a} \\ 0, & \text{όταν } t < \frac{x}{a} \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 125 Θα μελετήσουμε το επόμενο παραβολικό πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= u_t(x, t), & x \in \mathbb{R}, & t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u(0, t) &= 0, & t > 0 \end{aligned}$$

Εδώ η συνάρτηση f είναι η εξής

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } x \geq 0 \\ -1, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f δεν δύναται να μετασχηματιστεί ούτε κατά *Fourier* ούτε κατά *Laplace*. Θα εφαρμόσουμε εδώ τον συμμετρικό μετασχηματισμό *Laplace*. Εφαρμόζοντας τον συμμετρικό μετασχηματισμό *Laplace* ως προς την μεταβλητή x στην εξίσωση έχουμε ότι

$$s^2 G(s, t) + \bar{s}^2 \tilde{G}(\bar{s}, t) = G_t(s, t) + \tilde{G}_t(\bar{s}, t) \quad (4)$$

όπου $G(s, t) = \mathcal{L}(u(x, t))$ και $\tilde{G}(\bar{s}, t) = \mathcal{L}(u(-x, t))$.

Εφαρμόζουμε επίσης τον συμμετρικό μετασχηματισμό *Laplace* στην συνθήκη $u(x, 0) = f(x)$ και έχουμε ότι

$$G(s, 0) + \tilde{G}(\bar{s}, 0) = \frac{1}{s} - \frac{1}{\bar{s}} \quad (5)$$

Από την εξίσωση 4 και τις μετασχηματισμένες συνθήκες 5 θα πάρουμε δυο συνήθειες διαφορικές εξισώσεις οι οποίες είναι

$$\begin{aligned} s^2 G(s, t) &= G_t(s, t), & G(s, 0) &= \frac{1}{s}, \\ \bar{s}^2 \tilde{G}(\bar{s}, t) &= \tilde{G}_t(\bar{s}, t), & \tilde{G}(\bar{s}, 0) &= -\frac{1}{\bar{s}} \end{aligned}$$

Οι λύσεις των δυο εξισώσεων είναι

$$G(s, t) = \frac{1}{s} e^{s^2 t}, \quad \tilde{G}(\bar{s}, t) = -\frac{1}{\bar{s}} e^{\bar{s}^2 t}$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό σε κάθε μια από τις συναρτήσεις G και $\tilde{G}$ (χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνέλιξης) καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$u(x, t) = \begin{cases} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right), & \text{όταν } x \geq 0 \\ -\operatorname{erf}\left(\frac{-x}{2\sqrt{t}}\right), & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

όπου $\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-u^2} du$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση $u(x, t)$ ικανοποιεί το αρχικό πρόβλημα.

Θα αποδείξουμε στην συνέχεια ότι το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική λύση όταν απαιτήσουμε επιπλέον ότι η λύση θα πρέπει να είναι φραγμένη καθώς $|x| \rightarrow \infty$ ενώ η $u_x(x, t) \rightarrow 0$ καθώς $|x| \rightarrow \infty$. Τις επιπλέον αυτές απαιτήσεις τις ικανοποιεί η λύση που έχουμε ήδη δώσει.

Έστω ότι έχει δυο λύσεις, τις u_1, u_2 . Τότε η διαφορά τους $v = u_1 - u_2$ θα ικανοποιεί το επόμενο πρόβλημα

$$\begin{aligned} v_{xx}(x, t) &= v_t(x, t), & x \in \mathbb{R}, & t > 0 \\ v(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R} \\ v(0, t) &= 0, & t > 0 \\ v(x, t) &\text{ φραγμένη καθώς } |x| \rightarrow \infty, & v_x(x, t) \rightarrow 0 \text{ καθώς } |x| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με $v(x, t)$ και ολοκληρώνουμε ως προς t στο $(0, t)$. Στο δεξί μέλος θα έχουμε

$$\int_0^t v_t(x, y)v(x, y)dy = v^2(x, t) - \int_0^t v(x, y)v_t(x, y)dy$$

Συνεπώς

$$\int_0^t v_t(x, y)v(x, y)dy = \frac{1}{2}v^2(x, t)$$

Στην συνέχεια ολοκληρώνουμε την εξίσωση ως προς x σε όλο το $\mathbb{R}$. Στο αριστερό μέλος θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t v_{xx}(y, r)v(y, r)drdy &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} v_{xx}(y, r)v(y, r)dydr \\ &= \int_0^t \left(v_x(y, r)v(y, r) \Big|_{y=-\infty}^{y=\infty} \right) - \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2(y, r)dydr \\ &= - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2(y, r)dydr \end{aligned}$$

Τελικά, ισχύει ότι

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v^2(y, t)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2(y, r)dydr = 0$$

το οποίο ισχύει μονάχα όταν $v(x, t) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $t > 0$, δηλαδή $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ άρα το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 126 Θα υπολογίσουμε την λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης

$$\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= f(t) = \begin{cases} e^t, & \text{όταν } t \geq 0 \\ 1, & \text{όταν } t < 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Προφανώς δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό *Fourier* αλλά ούτε και τον (απλό) μετασχηματισμό *Laplace* λόγω της συνάρτησης στο δεξί μέλος της εξίσωσης. Αναγκαστικά, θα εφαρμόσουμε τον συμμετρικό μετασχηματισμό *Laplace*. Έχουμε ότι

$$s^2 \mathcal{L}(y(t))(s) + \bar{s}^2 \mathcal{L}(y(-t))(\bar{s}) + \mathcal{L}(y(t))(s) + \mathcal{L}(y(-t))(\bar{s}) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{\bar{s}}, \quad \operatorname{Re} s > 1$$

Εξισώνοντας όμοιους όρους έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y(t))(s) &= \frac{1}{2} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s^2+1} \\ \mathcal{L}(y(-t))(\bar{s}) &= \frac{1}{\bar{s}} - \frac{\bar{s}}{\bar{s}^2+1} \end{aligned}$$

Αντιστρέφοντας, προκύπτει η λύση η οποία είναι

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t, & \text{όταν } t \geq 0 \\ 1 - \cos t, & \text{όταν } t < 0 \end{cases}$$

Εύκολα επιβεβαιώνουμε ότι η y αποτελεί λύση της παραπάνω συνήθους διαφορικής εξίσωσης.

2.5.1 Σύνοψη

Συνοψίζοντας, στο κεφάλαιο αυτό ορίσαμε και μελετήσαμε τον μετασχηματισμό *Fourier* μιας συνάρτησης ο οποίος είναι

$$\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt \quad (6)$$

Στην συνέχεια, ορίσαμε και μελετήσαμε τον μετασχηματισμό *Laplace* μιας συνάρτησης ο οποίος είναι

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C} \quad (7)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-xt}e^{-iyt} dt, \quad \text{όταν } s = x + iy$$

Άρα, αν επεκτείνουμε μια συνάρτηση f σε όλο το $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(t) = 0$ για $t < 0$ τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{F}(e^{-xt}f(t))(y), \quad \text{όταν } s = x + iy \quad (8)$$

το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως ορισμός του μετασχηματισμού Laplace. Διαπιστώνουμε ότι διαλέγοντας $x = 0$ οι δυο μετασχηματισμοί συμπίπτουν. Πολλαπλασιάζοντας την συνάρτηση f με την ποσότητα e^{-xt} προσθέτουμε μια ελεύθερη παράμετρο, την x , έτσι ώστε να επιλεγεί κατάλληλα ούτως ώστε ο μετασχηματισμός Fourier να υπάρχει. Επομένως, αν μια συνάρτηση f δεν μετασχηματίζεται κατά Fourier, πιθανόν πολλαπλασιάζεται με την συνάρτηση e^{-xt} για κατάλληλο x , να είναι δυνατό να μετασχηματισθεί. Αυτό ακριβώς κάνει ο μετασχηματισμός Laplace. Όμως, για να γίνει αυτό σε μια συνάρτηση, πρέπει η συνάρτηση αυτή να είναι ίση με το μηδέν για $t < 0$.

Για την περίπτωση όπου η f δεν μηδενίζεται για $t < 0$, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον συμμετρικό μετασχηματισμό Laplace. Ο ορισμός του μετασχηματισμού αυτού είναι

$$\mathcal{SL}(f)(x_1, x_2, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-x_1H(t)+x_2H(-t)-iy)t} f(t) dt \quad (9)$$

$$\text{όπου } H(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } t \geq 0 \\ 0, & \text{όταν } t < 0 \end{cases}$$

Στην ουσία, πολλαπλασιάζουμε την δοσμένη συνάρτηση επί μια ποσότητα της μορφής $e^{(-x_1H(t)+x_2H(-t))t}$ και στην συνέχεια εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Fourier, επομένως ισχύει ότι

$$\mathcal{SL}(f)(x_1, x_2, y) = \mathcal{F}\left(e^{(-x_1H(t)+x_2H(-t))t} f(t)\right)(y) \quad (10)$$

το οποίο επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ορισμός του συμμετρικού μετασχηματισμού Laplace. Αν $f(t) = 0$ για $t < 0$, διαλέγοντας $x_1 = x$ και $x_2 = 0$ στην 10 λαμβάνουμε την 8. Από την άλλη μεριά αν η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ τότε διαλέγοντας $x_1 = x_2 = 0$ λαμβάνουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier 6. Στον συμμετρικό μετασχηματισμό Laplace πολλαπλασιάζοντας με την ποσότητα $e^{(-x_1H(t)+x_2H(-t))t}$ μια συνάρτηση f προσθέτουμε στην ουσία δυο ελεύθερες παραμέτρους, τις x_1, x_2 , ούτως ώστε αν επιλεγούν κατάλληλα να ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier. Συνεπώς, ο συμμετρικός μετασχηματισμός Laplace είναι μια φυσική επέκταση των μετασχηματισμών Fourier και Laplace περιλαμβάνοντας και τους δυο ταυτόχρονα.

Αναφορές

- [1] Γ. Δάσιος - Κ. Κυριάκη, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδ. ΑΘΗΝΑ, 1989.

- [2] Ν. Οικονομίδης - Χ. Καρυοφύλλης, Ολοκληρωτικός Λογισμός και Διαφορικός Λογισμός, Εκδόσεις Ζήτη, 1985.
- [3] Μιχάλης Παπαδημητράκης, Ανάλυση-Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής, www.kallipos.gr, 2015.
- [4] Γ. Παντελίδης, Ανάλυση, Εκδ. ΖΗΤΗ, 2000.
- [5] Γ. Παντελίδης - Δ. Κραββαρίτης, Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις Μερικών Παραγώγων, Εκδ. ΖΗΤΗ, 2003.
- [6] Γ. Παντελίδης - Δ. Κραββαρίτης - Β. Νασόπουλος - Π. Τσεκρέκος, Γραμμική Άλγεβρα, Αθήνα, 1983.
- [7] Στέφανος Τραχανάς, Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1989.
- [8] Νίκος Χαλιδιάς, Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, 2017.
- [9] Α. Χρυσάκης, Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, Αθήνα, 2013.
- [10] Χ. Φίλος, Μια Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, Ιωάννινα, 2005.
- [11] J. Bak - D. J. Newman, *Complex Analysis*, Springer, 1997.
- [12] R. J. Beerends-H. G. ter Morsche - J. C. van der Berg - E. M. van de Vrie, *Fourier and Laplace Transforms*, Cambridge University Press, 2003.
- [13] L. Brand, *Advanced Calculus*, Dover, 2006.
- [14] P. Collins, *Differential and Integral Equations*, Oxford University Press, 2006.
- [15] R. Courant - F. John, *Introduction to Calculus and Analysis I*, Springer, 1989.
- [16] Phil Dyke, *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*, Springer, 2001.
- [17] J. Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant*, Princeton University Press, 2003.
- [18] N. Halidias, *A generalization of Laplace and Fourier transforms*, arXiv:1701.06561
- [19] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, 1973.
- [20] S. Lang, *Introduction to Linear Algebra*, Springer, 1986.

- [21] R. Larson - D. Falvo, *Elementary Linear Algebra*, Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, 2009.
- [22] E. Landau, *Differential and Integral Calculus*, Chelsea, 1951.
- [23] T. W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988.
- [24] M. Protter - C. Morrey, *A First Course in Real Analysis*, Springer, second edition, 1997.
- [25] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.
- [26] W. Rogosinski, *Fourier Series*, Chelsea Publishing Company, 1950.
- [27] J. L. Schiff, *The Laplace Transform*, Springer, 1999.
- [28] K. Stromberg, *Introduction to Classical Real Analysis*, AMS, 2015.
- [29] A. Zygmunt, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, 2002.